

3. Представление основных математических структур на языке SCB

Данный раздел посвящен рассмотрению способов представления основных математических структур на языке SCB (Semantic Code Basic), основные положения которого были приведены в разделе 2.

Данный раздел может быть использован в качестве учебного пособия по дисциплине «Математические основы искусственного интеллекта» для студентов специальности «Искусственный интеллект».

3.1. Типология множеств и их представление в языке SCB. Основные множества языка SCB и соответствующие им ключевые узлы

Ключевые понятия и идентификаторы ключевых scb-узлов:

пара; узловое множество; предмет; узловое непредметное множество; семейство пар принадлежности; семейство узловых множеств; система множеств; канторовское множество (классическое множество); мультимножество (неклассическое множество); рефлексивное множество; нерефлексивное множество; мощность множества; одноэлементное множество; 2-мощное множество; 3-мощное множество; семейство множеств одинаковой мощности; семейство множеств неодинаковой мощности; семейство одноэлементных множеств; семейство 2-мощных множеств; семейство 3-мощных множеств; количество элементов множества; одноэлементное множество; 2-элементное множество; конечно-мощное множество; бесконечно-мощное множество; конечно-элементное множество; бесконечно-элементное множество; включение множества (быть нестрогим подмножеством); строгое включение множества (быть строгим подмножеством, быть собственным подмножеством); равенство множеств; эквивалентность множеств по совпадению элементов; пересекающиеся множества; объединение множеств; пересечение множеств; разность множеств; симметрическая разность множеств; соединение множеств; разбиение множеств; приведение мультимножества к канторовскому виду; множество (Универсальное нормализованное множество) .

Как было отмечено в разделе 2, язык SCB обеспечивает представление (изображение, запись, задание) только нормализованных множеств, т.е. множеств, элементами которых являются знаки множеств. Но это, как тоже было отмечено, не снижает семантической мощности языка SCB, т.к. любое множество легко преобразуемо к нормализованному виду.

Прежде, чем перейти к рассмотрению типологии множеств, приведем несколько примеров использования изобразительных средств различных модификаций языка SCB.

Пусть имеется некоторое множество s , состоящее из элементов $s_1, s_2, \dots, s_n$.

Следует отличать само множество s от знака этого множества, который является условно формируемым представителем обозначаемого им множества во всевозможных текстах (см. подраздел 2.1).

Следует также отличать само множество s от системы множеств, которая является представлением множества s и которая является множеством, включающим в себя в качестве элементов:

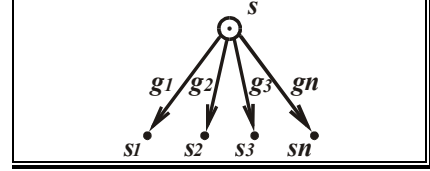
- все элементы множества s ;
- знак множества s ;
- знаки всех пар принадлежности, связывающих знак множества s с его элементами.

В нижеследующих примерах scbg-текстов 3.1.1, 3.1.2 и scbs-текстов 3.1.1 – 3.1.4 приведено представление (изображение, запись, задание) на языке SCB узлового непредметного множества, т.е. множества, не являющегося парой принадлежности и не являющегося предметным множеством. Здесь:

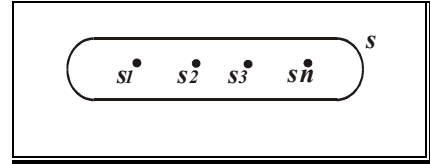
- узел с идентификатором s есть знак некоторого нормализованного множества, представлением (изображением) которого является данная scbg-конструкция;

- scb-элементы с идентификаторами $s_1, s_2, \dots, s_n$ есть такие знаки множеств, которые являются элементами множества s . Указанные знаки могут быть предметными узлами (т.е. знаками унарных ненормализованных множеств), дугами принадлежности (т.е. знаками пар принадлежности), непредметными узлами (т.е. знаками нормализованных множеств, не являющимися парами принадлежности).

SCBg-текст 3.1.1. Вариант 1g изображения узлового непредметного множества (с явным изображением дуг, выходящих из узла s)



SCBg-текст 3.1.2. Вариант 2g изображения узлового непредметного множества (с неявным изображением scb-дуг, выходящих из узла s)



SCBs-текст 3.1.1. Вариант 1s изображения узлового непредметного множества (с использованием именуемых scb-дуг, выходящих из узла s . Данный текст эквивалентен scbg-тексту 3.1.1)

$$s \vdash g_1 \vdash s_1 ; s \vdash g_2 \vdash s_2 ; s \vdash g_3 \vdash s_3 ; \dots ; s \vdash g_n \vdash s_n ;$$

SCBs-текст 3.1.2. Вариант 2s изображения узлового непредметного множества (с использованием неименуемых scb-дуг, выходящих из узла s . Данный текст эквивалентен scbg-тексту 3.1.2)

$$s \vdash ; s_1 ; s \vdash ; s_2 ; s \vdash ; s_3 ; \dots ; s \vdash ; s_n ;$$

SCBs-текст 3.1.3. Вариант 3s изображения узлового непредметного множества (с использованием неименуемых scb-дуг, выходящих из узла s , и уменьшением количества вхождений идентификаторов. Данный текст эквивалентен scbg-тексту 3.1.2 и scbs-тексту 3.1.2)

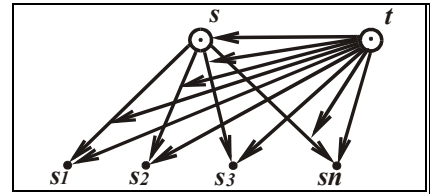
$$s \vdash ; s_1, s_2, s_3, \dots, s_n ;$$

SCBs-текст 3.1.4. Вариант 4s изображения узлового непредметного множества (с использованием неименуемых scb-дуг, выходящих из узла s , и scbs-разделителя синонимии. Данный текст эквивалентен scbg-тексту 3.1.2 и scbs-текстам 3.1.2 – 3.1.3)

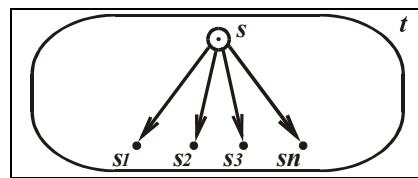
$$s = \{ s_1, s_2, s_3, \dots, s_n \} ;$$

На scbg-текстах 3.1.3 – 3.1.4 и scbs-текстах 3.1.5 – 3.1.14 приведены примеры изображения на языке SCB множества, которое представляет собой систему множеств, являющуюся представлением множества s . Обозначим эту систему множеств идентификатором t .

SCBg-текст 3.1.3. Вариант 1g изображения системы множеств (с явным изображением дуг, выходящих из узла t)



SCBg-текст 3.1.4. Вариант 2g изображения системы множеств (с неявным изображением дуг, выходящих из узла t)



SCBs-текст 3.1.5. Вариант 1s изображения системы множеств

/ Явное описание дуг, выходящих из узла s (см. scbs-текст 3.1.1) */*

$s \text{ ;! } g1 \text{ ;! } s1 \text{ ; } s \text{ ;! } g2 \text{ ;! } s2 \text{ ; } s \text{ ;! } g3 \text{ ;! } s3 \text{ ; } \dots \text{ ; } s \text{ ;! } gn \text{ ;! } sn \text{ ;}$

/ Явное описание дуг, выходящих из узла t и входящих во все узлы, обозначающие элементы множества s , и в знак самого множества s */*

$t \text{ ;! } gs1 \text{ ;! } s1 \text{ ; } t \text{ ;! } gs2 \text{ ;! } s2 \text{ ; } t \text{ ;! } gs3 \text{ ;! } s3 \text{ ; } \dots \text{ ; } t \text{ ;! } gsn \text{ ;! } sn \text{ ;}$

$t \text{ ;! } gs \text{ ;! } s \text{ ;}$

/ Явное описание дуг, выходящих из узла t и входящих во все дуги, которые выходят из узла s и входят в узлы, обозначающие элементы множества s */*

$t \text{ ;! } gg1 \text{ ;! } g1 \text{ ; } t \text{ ;! } gg2 \text{ ;! } g2 \text{ ; } t \text{ ;! } gg3 \text{ ;! } g3 \text{ ; } \dots \text{ ; } t \text{ ;! } ggn \text{ ;! } gn \text{ ;}$

SCBs-текст 3.1.6. Вариант 2s изображения системы множеств

/ Явное описание дуг, выходящих из узла s (см. scbs-текст 3.1.1) */*

$s \text{ ;! } g1 \text{ ;! } s1 \text{ ; } s \text{ ;! } g2 \text{ ;! } s2 \text{ ; } s \text{ ;! } g3 \text{ ;! } s3 \text{ ; } \dots \text{ ; } s \text{ ;! } gn \text{ ;! } sn \text{ ;}$

/ Неявное описание дуг, выходящих из узла t и входящих во все узлы, обозначающие элементы множества s , и в знак самого множества s */*

$t \text{ ;! } s \text{ ; } t \text{ ;! } s1 \text{ ; } t \text{ ;! } s2 \text{ ; } t \text{ ;! } s3 \text{ ; } \dots \text{ ; } t \text{ ;! } sn \text{ ;}$

/ Неявное описание дуг, выходящих из узла t и входящих во все дуги, которые выходят из узла s и входят в узлы, обозначающие элементы множества s */*

$t \text{ ;! } g1 \text{ ; } t \text{ ;! } g2 \text{ ; } t \text{ ;! } g3 \text{ ; } \dots \text{ ; } t \text{ ;! } gn \text{ ;}$

SCBs-текст 3.1.7. Вариант 3s изображения системы множеств

/ Явное описание дуг, выходящих из узла s (см. scbs-текст 3.1.1) */*

$s \text{ ;! } g1 \text{ ;! } s1 \text{ ; } s \text{ ;! } g2 \text{ ;! } s2 \text{ ; } s \text{ ;! } g3 \text{ ;! } s3 \text{ ; } \dots \text{ ; } s \text{ ;! } gn \text{ ;! } sn \text{ ;}$

/ Неявное описание дуг, выходящих из узла t и входящих в знак множества s , во все узлы, обозначающие элементы множества s , и во все дуги, которые выходят из узла s и входят в узлы, обозначающие элементы множества s */*

$t \text{ ;! } s, s1, s2, s3, \dots, sn, g1, g2, g3, \dots, gn \text{ ;}$

SCBs-текст 3.1.8. Вариант 4s изображения системы множеств

```

/* Явное описание дуг, выходящих из узла  $s$  (см. scbs-текст 3.1.1) */
 $s \text{ ;! } g1 \text{ ;! } s1 \text{ ; } s \text{ ;! } g2 \text{ ;! } s2 \text{ ; } s \text{ ;! } g3 \text{ ;! } s3 \text{ ; } \dots \text{ ; } s \text{ ;! } gn \text{ ;! } sn \text{ ;}$ 

/* Неявное (с использованием scbs-разделителя синонимии) описание дуг, выходящих из узла  $t$  и входящих в
знак множества  $s$ , во все узлы, обозначающие элементы множества  $s$ , и во все дуги, которые выходят из узла
 $s$  и входят в узлы, обозначающие элементы множества  $s$  */
 $t = \{ s, s1, s2, s3, sn, g1, g2, g3, \dots, gn \} ;$ 

```

SCBs-текст 3.1.9. Вариант 5s изображения системы множеств

```

/* Неявное описание всех дуг, выходящих из узла  $t$  */
 $t \text{ !; } s, s1, s2, s3, \dots, sn, (s \text{ !; } s1), (s \text{ !; } s2), (s \text{ !; } s3), \dots, (s \text{ !; } sn) ;$ 

```

SCBs-текст 3.1.10. Вариант 6s изображения системы множеств

```

/* Комбинирование неявного и явного описания дуг */
 $t = \{ s, s1, s2, s3, \dots, sn, (s \text{ !; } s1), (s \text{ !; } s2), (s \text{ !; } s3), \dots, (s \text{ !; } sn) \} ;$ 

```

SCBs-текст 3.1.11. Вариант 7s изображения системы множеств

```

/* Использование обозначения scb-узла, являющегося знаком системы множеств */
 $t = [ s \text{ ;! } g1 \text{ ;! } s1 \text{ ; } s \text{ ;! } g2 \text{ ;! } s2 \text{ ; } s \text{ ;! } g3 \text{ ;! } s3 \text{ ; } \dots \text{ ; } s \text{ ;! } gn \text{ ;! } sn ] ;$ 

```

SCBs-текст 3.1.12. Вариант 8s изображения системы множеств

```

/* Использование обозначения scb-узла, являющегося знаком системы множеств, в комбинации с неявным
описанием дуг, выходящих из узла  $s$  */
 $t = [ s \text{ !; } s1 \text{ ; } s \text{ !; } s2 \text{ ; } s \text{ !; } s3 \text{ ; } \dots \text{ ; } s \text{ !; } sn ] ;$ 

```

SCBs-текст 3.1.13. Вариант 9s изображения системы множеств

```

/* Использование обозначения scb-узла, являющегося знаком системы множеств, в комбинации с неявным
описанием дуг, выходящих из узла  $s$ , и с сокращением числа вхождений идентификаторов */
 $t = [ s \text{ !; } s1, s2, s3, \dots, sn ] ;$ 

```

SCBs-текст 3.1.14. Вариант 10s изображения системы множеств

```

/* Комбинированное использование обозначения scb-узла, являющегося знаком системы множеств, и обозна-
чения scb-узла, являющегося знаком узлового неперемножаемого множества */
 $t = [ s = \{ s1, s2, s3, \dots, sn \} ] ;$ 

```

Перейдем к рассмотрению типологии множеств.

По признакам нормализованности множества можно разбить на два следующих класса (см. подраздел 2.1):

- нормализованные множества (множества, все элементы которых являются знаками множеств);
- ненормализованные множества (множества, среди элементов которых имеется хотя бы один, не являющийся знаком какого-либо множества).

Напомним, что в языке SCB явно представить (изобразить) можно только нормализованное множество. При этом вспомним также, что любое ненормализованное множество можно привести к нормализованному виду (см. подраздел 2.1).

По признаку "является или не является множество парой принадлежности" множества разбиваются на два следующих класса:

- пары принадлежности – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*пара принадлежности*";
- узловые множества (т.е. множества, не являющиеся парами принадлежности) – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*узловое множество*".

В свою очередь семейство узловых множеств разбивается на следующие классы:

- предметные множества (унарные ненормализованные множества) – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*предмет*";
- узловые непредметные множества – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*узловое непредметное множество*".

В свою очередь семейство узловых непредметных нормализованных множеств разбивается на:

- множества, состоящие из знаков пар принадлежности, – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*семейство пар принадлежности*";
- множества, состоящие из знаков узловых множеств, – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*семейство узловых множеств*";
- полностью нормализованные системы множеств (т.е. множества, состоящие из знаков пар принадлежности и знаков узловых множеств) – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*система множеств*".

По признаку наличия многократного вхождения элементов множества делятся на:

- множества без кратных элементов (т.е. множества, все элементы которых входят в эти множества однократно, – такие множества называются канторовскими или классическими множествами [464] (Таран Т.А.1998кн-ОсновДМ) – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*канторовское множество*";
- множества с кратными элементами (т.е. множества, некоторые элементы которых входят в эти множества многократно, – такие множества называются мультимножествами, см. scb-текст 3.1.1) – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*мультимножество*".

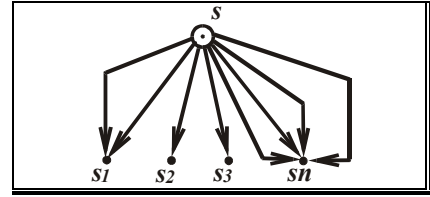
По признаку вхождения в число элементов множества собственного знака множества делятся на:

- рефлексивные множества (множества, которые включают в число своих элементов собственные знаки, см. scb-текст 3.1.2) – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*рефлексивное множество*";
- нерефлексивные множества – в языке SCB этот класс множеств обозначается ключевым узлом "*нерефлексивное множество*".

SCB-текст 3.1.1. Представление на обеих модификациях языка SCB множества с кратными элементами (с неоднократным входением некоторых элементов; такие множества будем называть мультимножествами):

- знак, изображенный здесь scb-элементом s_1 , входит в качестве элемента во множество, знак которого изображен scb-элементом s как минимум двукратно;
- знак s_2 является как минимум однократным элементом множества s ;
- знак s_3 является как минимум однократным элементом множества s .

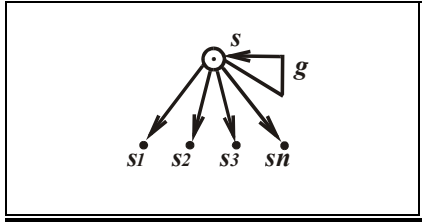
Знак s_n является как минимум четырехкратным элементом множества s .



∇

$s !; s_1, s_1, s_2, s_3, s_n, s_n, s_n, s_n ;$

SCB-текст 3.1.2. Представление на обеих модификациях языка SCB рефлексивного множества (здесь петлевая scb-дуга g означает, что одним из элементов множества s является знак самого этого множества)

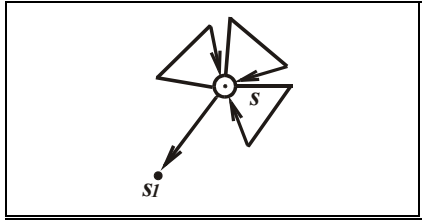


∇

$s !; s, s_1, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n ;$

Приведем еще несколько примеров "экзотических" множеств (см. scb-тексты 3.1.3 – 3.1.5).

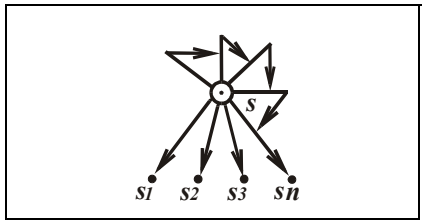
SCB-текст 3.1.3. Представление на обеих модификациях языка SCB рефлексивного множества с многократным входением знака самого себя



∇

$s !; s_1, s, s, s, s ;$

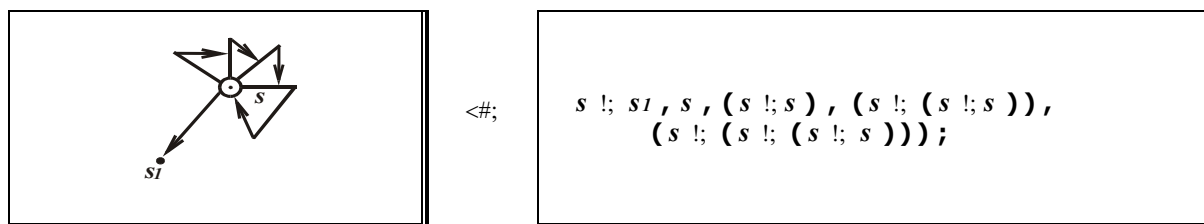
SCB-текст 3.1.4. Представление на обеих модификациях языка SCB множества с "рекурсивным" входением дуг



∇

$s !; s_1, s_2, s_3, s_n, (s !; s_n), (s !; (s !; s_n)), (s !; (s !; (s !; s_n))), (s !; (s !; (s !; (s !; s_n)))) ;$

SCB-текст 3.1.5. Представление на обеих модификациях языка SCB рефлексивного множества с "рекурсивным" вхождением дуг (вариант 2)



Важнейшей измеряемой (числовой) характеристикой множества является **мощность множества** – общее количество вхождений всех элементов множества. По этому признаку множества делятся на следующие классы (перечислим scb-идентификаторы ключевых узлов, обозначающих эти классы):

- “**одномощное множество**” – класс множеств, которые состоят из одного однократно входящего в его состав элемента;
- “**2-мощное множество**” – класс множеств, мощность которых равна 2;
- “**3-мощное множество**” – класс множеств, мощность которых равна 3;
- и т.д.

Мощность нормализованного множества в языке SCB определяется количеством дуг принадлежности, выходящих из знака этого множества.

Понятие "мощность множества" позволяет выделить еще целый ряд классов множеств (перечислим scb-идентификаторы ключевых узлов, обозначающих эти классы):

- “**семейство множеств одинаковой мощности**” (быть семейством множеств одинаковой мощности);
- “**семейство множеств неодинаковой мощности**” (в состав каждого такого семейства входят по крайней мере два множества с различной мощностью).

В свою очередь множество знаков, обозначающих всевозможные семейства множеств одинаковой мощности, разбивается на следующие подклассы (перечислим соответствующие им scb-идентификаторы):

- “**семейство одномощных множеств**”;
- “**семейство 2-мощных множеств**”;
- “**семейство 3-мощных множеств**”;
- и т.д.

Можно говорить ещё об одной измеряемой характеристике множеств – **количестве элементов**. Очевидно, что если множество не имеет кратных элементов, то его мощность и количество его элементов совпадают.

Согласно рассматриваемой характеристике, в семействе всевозможных множеств можно выделить следующие классы множеств:

- “**одноэлементное множество**” (множества, состоящие из одного элемента, – не путать с унарными множествами);
- “**2-элементное множество**”;
- и т.д.

На основании свойства "мощность множества" и свойства "количество элементов множества" можно выделить также следующие классы множеств (перечислим соответствующие scb-идентификаторы):

- “**конечно-мощное множество**” (множества, мощность которых является конечным числом);
- “**бесконечно-мощное множество**” (∞ - мощные множества);
- “**конечно-элементное множество**”;
- “**бесконечно-элементное множество**” (∞ - элементные множества).

Очевидно, что:

- могут существовать конечно-элементные, но ∞ - мощные множества;
- не существует множеств, которые являются ∞ - элементными, но конечно-мощными;
- каждое ∞ - элементное множество является ∞ - мощным.

Множество, являющееся конечно-мощным и соответственно конечно-элементным, будем называть **конечным множеством**, а класс таких множеств обозначим ключевым узлом с scb-идентификатором "*конечное множество*". Множество, являющееся ∞ - мощным или ∞ - элементным, будем называть **бесконечным множеством**, а класс таких множеств обозначим scb-узлом с scb-идентификатором "*бесконечное множество*".

Конечные множества, знаки которых входят в состав scb-текста, делятся на два важных класса:

- конечные множества, частично представленные в текущем состоянии scb-текста, – для каждого такого множества в текущем состоянии scb-текста присутствуют не все дуги принадлежности, выходящие из знака этого множества и входящие в его элементы;
- конечные множества, полностью представленные в текущем состоянии scb-текста, – для каждого такого множества в текущем состоянии scb-текста присутствуют все дуги принадлежности, выходящие из знака этого множества и входящие в его элементы.

Примечание. В процессе переработки информации состояние scb-текста может меняться. Изменение состояния scb-текста сводится к появлению новых scb-элементов (в частности, новых дуг принадлежности и узлов), а также к удалению (стиранию) имеющихся scb-элементов. В результате этого некоторые конечные частично представленные множества могут стать полностью представленными (если будут сгенерированы все элементы некоторого множества и все дуги принадлежности, выходящие из знака этого множества), а также некоторые полностью представленные множества могут стать частично представленными (если будут удалены некоторые дуги принадлежности, выходящие из знака полностью представленного множества). Все это должно учитываться при преобразовании scb-текста.

Пусть даны два множества – множество s_1 и множество s_2 . Рассмотрим то, как могут соотноситься между собой эти множества, и то, как эти отношения записываются в языке SCBs:

Таблица 3.1.1. Описание соотношений между множествами в языке SCBs

SCBs-текст	Комментарий
$s_1 !; s_2 ; /* \text{ или } s_2 <! s ; */$	Знак множества s_2 является одним из элементов множества s_1
$s_1 \forall; s_2 ; /* \text{ или } s_2 <\forall s_1 ; */$	Знак множества s_2 <u>не</u> является одним из элементов множества s_1
$s_2 !; s_1 ; /* \text{ или } s_1 <! s_2 ; */$	Знак множества s_1 является одним из элементов множества s_2
$s_2 \forall; s_1 ; /* \text{ или } s_1 <\forall s_2 ; */$	Знак множества s_1 <u>не</u> является одним из элементов множества s_2
$s_1 \supseteq s_2 ; /* \text{ или } s_2 \subseteq s_1 ; */$	Множество s_2 является нестрогим подмножеством множества s_1 , т.е. <u>каждый</u> элемент множества s_2 является также элементом множества s_1 . При этом количество вхождений каждого элемента во множество s_2 <u>не</u> превышает количества вхождений <u>этого же</u> элемента во множество s_1
$s_1 \not\supseteq s_2 ; /* \text{ или } s_2 \not\subseteq s_1 ; */$	Множество s_2 <u>не</u> является нестрогим подмножеством множества s_1

Окончание табл. 3.1.1.

SCBs-текст	Комментарий
$s_2 \supseteq s_1 ; /* \text{ или } s_1 \subseteq s_2 ; */$	Множество s_1 является нестрогим подмножеством множества s_2
$s_2 \not\supseteq s_1 ; /* \text{ или } s_1 \not\subseteq s_2 ; */$	Множество s_1 <u>не</u> является нестрогим подмножеством множества s_2
$s_1 \supset s_2 ; /* \text{ или } s_2 \subset s_1 ; */$	Множество s_2 является строгим подмножеством множества s_1 , т.е. каждый элемент множества s_2 является элементом множества s_1 , при этом существует по крайней мере один элемент множества s_1 , не являющийся элементом множества s_2 либо имеющий во множестве s_2 меньшее количество вхождений
$s_1 \ni s_2 ; /* \text{ или } s_2 \ni s_1 ; */$	Множество s_1 <u>не</u> является строгим подмножеством множества s_2
$s_2 \supset s_1 ; /* \text{ или } s_1 \subset s_2 ; */$	Множество s_1 является строгим (собственным) подмножеством множества s_2
$s_2 \ni s_1 ; /* \text{ или } s_1 \ni s_2 ; */$	Множество s_1 <u>не</u> является строгим подмножеством множества s_2
$s_1 \ni s_2 ; /* \text{ или } s_2 \ni s_1 ; */$	Множество s_1 и множество s_2 равны, т.е. каждый элемент множества s_1 является элементом множества s_2 и наоборот. При этом, если какой-либо элемент в одно из этих множеств входит многократно, то в другое множество он входит столько же раз
$s_1 (s_2 ; /* \text{ или } s_2 (s_1 ; /*$	Множество s_1 и множество s_2 <u>не</u> равны
$s_1) s_2 ; /* \text{ или } s_2) s_1 ; /*$	Множество s_1 и множество s_2 содержат одни и те же элементы, но, возможно, с разной кратностью
$s_1 * s_2 ; /* \text{ или } s_2 * s_1 ; /*$	Существует по крайней мере один элемент множества s_1 , не являющийся элементом множества s_2 , или наоборот
$s_1 + s_2 ; /* \text{ или } s_2 + s_1 ; /*$	Множество s_1 и множество s_2 являются пересекающимися множествами, т.е. множествами, у которых имеется по крайней мере один общий элемент
$s_1 , s_2 ; /* \text{ или } s_2 , s_1 ; /*$	Множество s_1 и множество s_2 <u>не</u> являются пересекающимися множествами

Примечание. Следует отличать:

- scb-элементы, которые являются знаками разных, но равных множеств (т.е. фактически являются знаками разных объектов);
- синонимичные scb-элементы, которые являются разными знаками, но одного и того же множества (т.е. разные знаки одного и того же объекта).

Подчеркнем при этом, что введение в формальные тексты равных множеств необходимо проводить весьма аккуратно – делать это тогда, когда без этого действительно трудно обойтись.

Кроме того, из двух заданных множеств можно формировать новые множества с помощью ряда теоретико-множественных операций. Рассмотрим некоторые из этих операций и приведем используемые в языке SCBs способы идентификации (обозначения) множеств, формируемых с помощью указанных теоретико-множественных операций.

Таблица 3.1.2. Сложные идентификаторы scb-элементов, формируемые с помощью теоретико-множественных операций

Идентификатор	Комментарий
$(s_1 \ 0 \ s_2)$ $/^*$ или $(s_2 \ 0 \ s_1) \ ^*/$	Множество, являющееся результатом <u>объединения множеств</u> s_1 и s_2 . В это множество входят все те и только те элементы, которые являются либо элементами множества s_2 , либо элементами множества s_1 . При этом, если некий элемент x входит в состав одного из указанных множеств n -кратно, а в состав другого m -кратно (причем $m \geq n$), то в состав множества $(s_1 \ 0 \ s_2)$ указанный элемент будет входить m -кратно. Кратность, равная нулю, означает отсутствие вхождений элемента во множество
$(s_1 \ / \ s_2)$ $/^*$ или $(s_2 \ / \ s_1) \ ^*/$	Множество, являющееся результатом <u>пересечения множеств</u> s_1 и s_2 . В это множество входят все те и только те элементы, которые являются как элементами множества s_1 , так и элементами множества s_2 . При этом, если некий элемент x входит в состав одного из указанных множеств n -кратно, а в состав другого m -кратно (причем $m \geq n$), то в состав множества $(s_1 \ / \ s_2)$ указанный элемент будет входить n -кратно
$(s_1 \ . \ s_2)$	Множество, являющееся результатом <u>разности множеств</u> s_1 и s_2 . В это множество входят все те и только те элементы множества s_1 , которые <u>не</u> являются элементами множества s_2
$(s_1 \ - \ s_2)$ $/^*$ или $(s_2 \ - \ s_1) \ ^*/$	Множество, являющееся результатом <u>симметрической разности множеств</u> s_1 и s_2 . В это множество входят все те и только те элементы множества $(s_1 \ 0 \ s_2)$, которые <u>не</u> являются элементами множества $(s_1 \ / \ s_2)$. Очевидно, что сложные имена вида $(s_1 \ - \ s_2)$ всегда синонимичны сложным именам вида $((s_2 \ 0 \ s_1) \ . \ (s_1 \ / \ s_2))$, $((s_2 \ . \ s_1) \ 0 \ (s_1 \ . \ s_2))$
$(s_1 \ 1 \ s_2)$ $/^*$ или $(s_2 \ 1 \ s_1) \ ^*/$	Множество, являющееся результатом <u>соединения множеств</u> s_1 и s_2 . В это множество входят все те и только те элементы, которые являются либо элементами множества s_1 , либо элементами множества s_2 . При этом, если некий элемент x входит в состав одного из указанных множеств n -кратно, а в состав другого m -кратно, то в состав множества $(s_1 \ 1 \ s_2)$ указанный элемент будет входить $(n + m)$ -кратно

Будем говорить, что множество s_1 и множество s_2 являются разбиением множества s на два подмножества в том и только в том случае, если:

- $s = (s_1 \ 0 \ s_2) \ /^*$ здесь знак равенства указывает на синонимичность имени $^*/$;
- $s_1 \ , \ s_2$;

Будем говорить, что множество s_2 является результатом приведения мультимножества s_1 к канторовскому виду в том и только в том случае, если:

- $s_1 \) \ s_2$;
- $s_2 \ <! \text{ канторовское множество } \ /^*$ множество без кратных элементов $^*/$;

Универсальное нормализованное множество – это множество, по отношению к которому все остальные нормализованные множества являются подмножествами. В языке SCB универсальное нормализованное множество обозначается scb-идентификатором “ *множество* ”.

Итак, мы дополнительно ввели в язык SCBs:

- ряд новых разделителей, соответствующих различным связям между множествами ($\forall$; $<\forall$, $\supseteq$, $\subseteq$, $\not\subseteq$, $\notin$, $\supset$, $\subset$, $\exists$, $\nexists$, ε , $($, $)$, $*$, $+$, $,$, $-$);
- новые виды scbs-предложений (с указанными выше разделителями);
- ряд новых разделителей, соответствующих различным операциям над множествами ($\cap$, $\cup$, $\setminus$, $-$);
- новые виды сложных (производных) идентификаторов, которые по определенным правилам (с помощью разделителей $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $-$) конструируются из других идентификаторов. В состав сложных идентификаторов непосредственно могут входить другие идентификаторы. Но любой сложный идентификатор, в конечном счёте, сводится к простым идентификаторам, а также к некоторому набору разделителей и ограничителей (скобок разного вида). О мотивах введения сложных идентификаторов в язык SCBs см. в правиле 2.7.4 лаконичного изображения scbs-текстов (см. подраздел 2.7).

В пункте 3.3.11 будет рассмотрено то, как трактуются в графическом языке SCBg введенные выше понятия, отражающие различные соотношения между множествами. В частности, будет рассмотрено то, каким scbg-конструкциям соответствует рассмотренное выше "теоретико-множественное" расширение языка SCBs.

Упражнения к подразделу 3.1.

Упражнение 3.1.1. Существуют ли конечно-мощные, но $\aleph$ -элементные множества?

Упражнение 3.1.2. Могут ли бесконечные множества быть полностью представленными?

Упражнение 3.1.3. Пусть некоторые два scb-узла являются синонимичными. Следует ли из этого, что они являются знаками равных множеств?

Упражнение 3.1.4. Пусть имеется два равных множества. Следует ли из этого, что знаки этих множеств являются синонимичными?

3.2. Понятие кортежа. Атрибуты элементов кортежа. Представление кортежей в языке SCB. Типология кортежей

3.2.1. Понятие кортежа и атрибута

Ключевые понятия: кортеж; атрибут; числовой атрибут; неориентированное множество.

Кортеж – это множество, у которого каждому вхождению каждого его элемента явно или неявно (по умолчанию) ставится в соответствие некоторый **атрибут**, указывающий роль этого вхождения элемента в рамках рассматриваемого кортежа. Формально атрибут вхождений элементов в кортежи – это множество знаков пар принадлежности, связывающих знаки кортежей с такими вхождениями их элементов, которые в рамках указанных кортежей выполняют некоторую одинаковую роль. **Кортеж** – это множество, для которого существенным является не только набор вхождений элементов в это множество, но и дополнительное явное указание роли (атрибута) в рамках этого множества хотя бы одного вхождения какого-либо его элемента. Кортежи также называют ролевыми структурами, упорядоченными наборами, упорядоченными множествами, ориентированными множествами, векторами, n -ками. В частном случае атрибуты могут быть числовыми. В кортеже с числовыми атрибутами все вхождения его элементов нумеруются от 1 до некоторого n . **Числовой атрибут** – это условный порядковый номер вхождения элемента в кортеж. Количество всех вхождений в состав кортежа всех его элементов будем называть **мощностью кортежа**. Элемент кортежа, имеющий в рамках этого кортежа атрибут ai , будем называть **ai -элементом** (ai -компонентом) этого кортежа.

Один и тот же объект может быть элементом разных кортежей. При этом в рамках разных кортежей этот объект может иметь разные атрибуты.

Множество, не являющееся кортежем, будем называть **неориентированным множеством**.

Принципиальным свойством атрибутов является то, что указание того, к какому атрибуту относится та или иная пара принадлежности, выходящая из знака кортежа, задает семантику соответствующего кортежа, поскольку каждый атрибут задает определенную роль вхождений элементов в рамках кортежей. Из этого, в частности, следует то, что в отличие от неориентированных множеств (т. е. множеств, не являющихся кортежами), кортежи с совпадающими элементами, но с несовпадающими атрибутами вхождений этих элементов считаются неравными кортежами.

Один и тот же элемент в рамках одного кортежа может выполнять сразу несколько ролей, что соответствует нескольким вхождениям этого элемента, принадлежащим разным атрибутам. Каждому атрибуту, как и любому другому множеству, можно поставить в соответствие знак этого атрибута. Знак атрибута есть не что иное, как относительное понятие, определяющее свойство какого-либо объекта, имеющее место по отношению к каким-то другим объектам. Примеры знаков атрибутов: “ *быть сыном_*”, “ *быть суммой_*”, “ *быть слагаемым_*”.

При идентификации знаков атрибутов в языке SCB введем следующее правило: последним символом идентификатора знака атрибута в языке SCB должен быть символ подчеркивания. Примеры идентификаторов атрибутов приведены на scbs-тексте 3.2.1.1.

SCBs-текст 3.2.1.1. Примеры идентификации атрибутов

```
сын_      = быть сыном_;
дочь_     = быть дочерью_;
отец_     = быть отцом_;
мать_     = быть матерью_;
непосредственный потомок_ = быть непосредственным потомком_;
непосредственный предок_  = быть непосредственным предком_;
потомок_  = быть потомком_;
предок_   = быть предком_;
сумма_    = быть суммой_;
слагаемое_ = быть слагаемым_;
произведение_ = быть произведением_;
смножитель_ = быть множителем_;
старший по возрасту_ = быть старшим по возрасту_;
max_      = быть максимальным числом_; /* для заданного множества чисел */
min_      = быть минимальным числом_; /* для заданного множества чисел */
1_        = быть первым компонентом кортежа_;
2_        = быть вторым компонентом кортежа_;
```

Примечание. Последние два атрибута и аналогичные им являются числовыми атрибутами или порядковыми числами. Они указывают условный номер вхождения элементов (компонентов) в состав соответствующих кортежей.

Для изображения знака атрибута на языке SCBg используется графический примитив $\oplus$, соответствующий изображению знака семейства дуг принадлежности (см. табл. 2.3.1 в подразделе 2.3). Примеры использования этого графического примитива см. в пункте 3.2.2.

3.2.2. Примеры кортежей и их представление в языках SCBg и SCBs

Ключевые понятия и идентификаторы ключевых scb-узлов:

классический кортеж; *кортеж с числовыми атрибутами*; *пара принадлежности*; *знак множества_* (быть знаком множества_); *элемент множества_* (быть элементом множества_); *кортеж* (быть кортежем, не являющимся парой принадлежности); *ориентированная пара* (2-мощный кортеж); *двойная линия со стрелкой* (графический примитив языка SCBg, изображающий знак ориентированной пары); *петля*; *атрибут*; *задаваемый по умолчанию*.

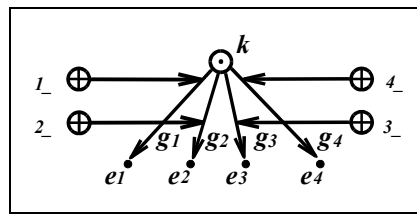
На scbg-текстах 3.2.2.1 – 3.2.2.2 и scbs-текстах 3.2.2.1 – 3.2.2.4 приведены примеры изображения 4-мощного (т.е. имеющего мощность, равную 4) классического кортежа с числовыми атрибутами без кратных элементов (т.е. при отсутствии многократного вхождения в состав кортежа хотя бы одного его элемента) на соответствующих модификациях языка SCB.

Приведем несколько вариантов изображения указанного кортежа на языке SCBg.

SCBg-текст 3.2.2.1. Вариант 1g изображения 4-мощного кортежа

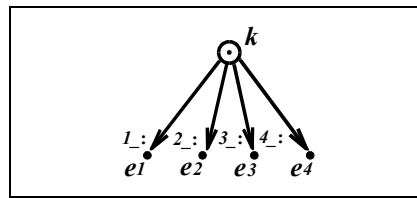
Здесь:

- k – знак кортежа;
- e_1, e_2, e_3, e_4 – элементы этого кортежа.



SCBg-текст 3.2.2.2. Вариант 2g изображения 4-мощного кортежа

Идентификатор с двоеточием, приписываемый графическому изображению какого-либо scb-элемента (в данном случае – изображению scb-дуги) – это идентификатор scb-узла, из которого проведена scb-дуга в указанный scb-элемент.



Заметим, что идентификатор с двоеточием совсем не обязательно должен быть идентификатором знака атрибута (см. scbg-текст 2.4.4). Более того, идентификатор с двоеточием совсем не обязательно должен приписываться изображениям только scb-дуги – это могут быть изображения scb-узлов, а также scb-элементов неуточняемого типа.

SCBs-текст 3.2.2.1. Вариант 1s изображения 4-мощного кортежа

```
/* Использование идентифицируемых дуг */
k ;! g1 ;! e1 ; k ;! g2 ;! e2 ; k ;! g3 ;! e3 ; k ;! g4 ;! e4 ;
1_ !; g1 ; 2_ !; g2 ; 3_ !; g3 ; 4_ !; g4 ;
```

SCBs-текст 3.2.2.2. Вариант 2s изображения 4-мощного кортежа

```
/* Использование неидентифицируемых дуг */
1_ !; ( k !; e1 ) ; 2_ !; ( k !; e2 ) ; 3_ !; ( k !; e3 ) ; 4_ !; ( k !; e4 ) ;
```

SCBs-текст 3.2.2.3. Вариант 3s изображения 4-мощного кортежа

```
/* Использование scb-узла, обозначающего кортеж */
k = □ 1_ : e1 , 2_ : e2 , 3_ : e3 , 4_ : e4 □ ;
```

SCBs-текст 3.2.2.4. Вариант 4s изображения 4-мощного кортежа

```
/* Использование scb-узла, обозначающего кортеж. Здесь числовые атрибуты подразумеваются по умолчанию */
k = □ e1 , e2 , e3 , e4 □ ;
```

Кортеж будем называть **классическим кортежем** в том и только том случае, если он обладает следующими свойствами:

- 1) каждому вхождению элемента в состав кортежа (т.е. каждой scb-дуге, выходящей из знака кортежа) соответствует один и только один атрибут;
- 2) не существует двух различных вхождений в состав кортежа разных элементов (или одного и того же элемента), отмеченных одним и тем же атрибутом.

Введём ключевой scb-узел “**классический кортеж**”, обозначающий множество классических кортежей. Кортеж будем называть **классическим кортежем с числовыми атрибутами** в том и только в том случае, если:

- 1) кортеж является классическим;
- 2) в кортеже используются только числовые атрибуты от $1_$ до $n_$, где n – мощность кортежа, т.е. количество scb-дуг, выходящих из знака кортежа.

Аналогично введём ключевой scb-узел “**кортеж с числовыми атрибутами**”, обозначающий множество классических кортежей с числовыми атрибутами. Пара принадлежности, введенная нами в подраздел 2.1, является примером классического кортежа, который имеет мощность, равную 2 (т.е. является 2-мощным множеством), и которому соответствуют атрибуты “**знак множества**” и “**элемент множества**”.

Существенное отличие пар принадлежности от других кортежей, не являющихся парами принадлежности, заключается в том, что в языках SCB, SCBg и SCBs представление пар принадлежности (см. подраздел 2.3 и подраздел 2.5) и представление кортежей, не являющихся парами принадлежности, осуществляется принципиально разным образом. Связь знака пары принадлежности с элементами этой пары изображается инцидентностью соответствующих scb-элементов. В то время как связь знака кортежа, не являющегося парой принадлежности, с элементами этого кортежа изображается смежностью соответствующих scb-элементов, т.е. с помощью scb-дуги, соединяющей эти scb-элементы.

Введем ключевой scb-узел, обозначающий множество знаков всевозможных кортежей, не являющихся парами принадлежности. В языке SCBg этот узел можно изобразить либо с помощью графического примитива $\odot$, либо с помощью графического примитива $\ominus$. Указанному scb-узлу припишем идентификатор “**кортеж**” (*быть кортежем, не являющимся парой принадлежности*). При этом введем правило 3.2.2.1 изображения на языке SCBg кортежа, не являющегося парой принадлежности.

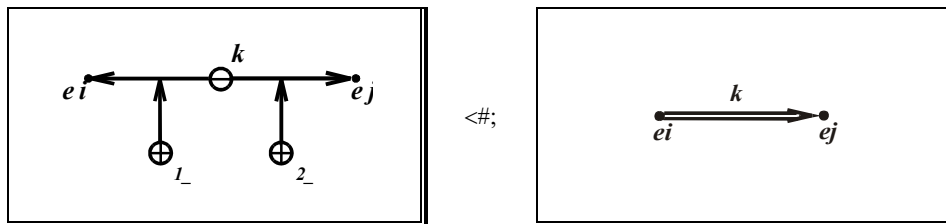
Правило 3.2.2.1. Следующие изображения кортежа, не являющегося парой принадлежности, являются эквивалентными:



Таким образом, введён новый графический примитив $\ominus$, который явно указывает принадлежность изображаемого узла ко множеству, обозначаемому scb-узлом с идентификатором “**кортеж**”. Иными словами, данный графический примитив явно задает тип изображаемого scb-узла как знака кортежа, не являющегося парой принадлежности.

Для более компактного изображения в языке SCBg 2-мощных классических кортежей (пар), не являющихся парами принадлежности, в языке SCBg имеется ещё один графический примитив – **двойная линия** со стрелкой на одном конце. Такая двойная линия является изображением знака 2-мощного кортежа, не являющегося парой принадлежности. Знак 2-мощного кортежа будем называть **дугой**. Следовательно, двойная линия со стрелкой – это изображение дуги, не являющейся scb-дугой (знаком пары принадлежности). Таким образом, для языка SCBg можно ввести правило 3.2.2.2 компактного изображения 2-мощных классических кортежей (простых ориентированных пар, см. подраздел 2.4, scbg-текст 2.4.10).

Правило 3.2.2.2. Следующие изображения кортежа, не являющегося парой принадлежности, являются эквивалентными:

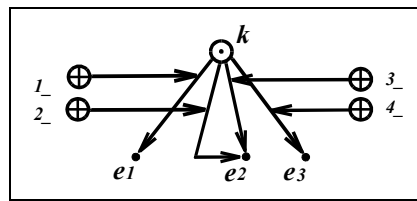


Рассмотрим несколько примеров изображения кортежей.

На scbg-тексте 3.2.2.3 и эквивалентном ему scbs-тексте 3.2.2.5 приведен пример изображения 4-мощного классического кортежа (четверки) с числовыми атрибутами и с кратными элементами (с многократным входением по крайней мере одного элемента).

SCBg-текст 3.2.2.3. Пример изображения 4-мощного классического кортежа с числовыми атрибутами и с кратными элементами

Здесь scb-элемент e_2 входит двукратно в состав кортежа k (один раз под атрибутом $2_$, а второй раз – под атрибутом $3_$).



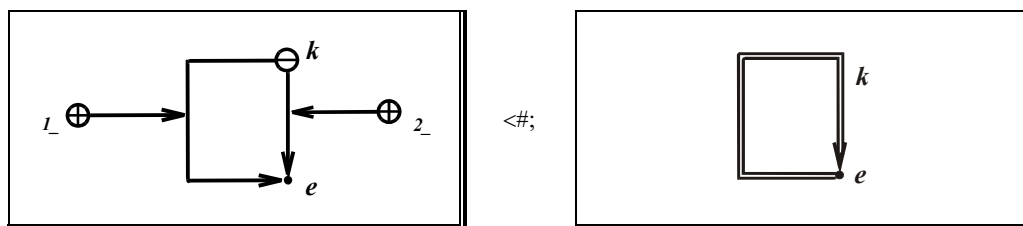
SCBs-текст 3.2.2.5. Пример изображения 4-мощного классического кортежа с числовыми атрибутами и с кратными элементами

$k = [1_ : e_1, 2_ : e_2, 3_ : e_2, 4_ : e_3] ; \quad /* \text{ Или } k = [e_1, e_2, e_2, e_3] ; */$

Примечание. Подчеркнем, что в классическом кортеже допустимо многократное входение элементов.

На scbg-тексте 3.2.2.4 приведен пример изображения 2-мощного классического кортежа (пары) с кратным входением элемента. Такую пару будем называть **петлей**, множество всех петель и только петель обозначим ключевым scb-узлом “**петля**”.

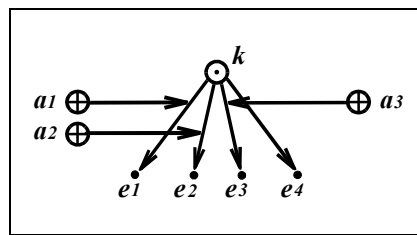
SCBg-текст 3.2.2.4. Пример изображения 2-мощного классического кортежа (пары) с кратным входением элемента



На scbg-тексте 3.2.2.5 приведен пример изображения кортежа с неявно заданным атрибутом. Такой атрибут будем называть **атрибутом по умолчанию**.

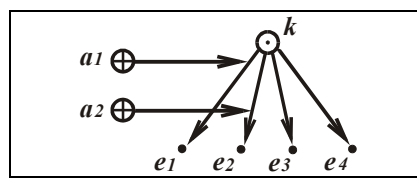
SCBg-текст 3.2.2.5. Пример изображения кортежа с атрибутом по умолчанию

Здесь отсутствие указания атрибута для вхождения scb-элемента e_4 в кортеж k означает не отсутствие атрибута у этого вхождения, а то, что этот неявно указываемый (т.е. указываемый по умолчанию) атрибут отличен от атрибутов a_1 , a_2 , a_3 .



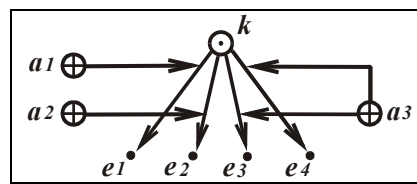
Примечание. Если несколько вхождений элементов в кортеж не имеют явно указываемого атрибута, то считается, что указанные вхождения имеют один и тот же задаваемый по умолчанию атрибут, отличающийся от всех остальных атрибутов, используемых в данном кортеже (см. scbg-текст 3.2.2.6).

SCBg-текст 3.2.2.6. Пример изображения кортежа, в котором несколько вхождений элементов отмечены атрибутом, задаваемым по умолчанию



SCBg-текст 3.2.2.7. Пример изображения кортежа, в котором несколько вхождений элементов имеют одинаковые атрибуты

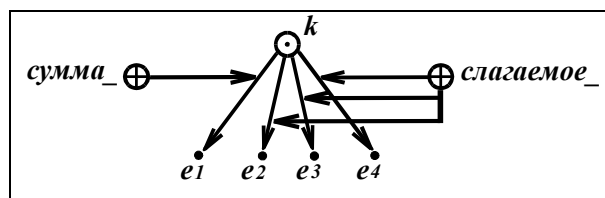
Здесь вхождения scb-элементов e_3 и e_4 в кортеж k имеют одинаковый атрибут a_3 .



На scbg-тексте 3.2.2.8 приведен пример изображения кортежа, связывающего набор некоторых чисел с их суммой. Это конкретный содержательный пример кортежа, в котором несколько вхождений элементов имеют одинаковые атрибуты.

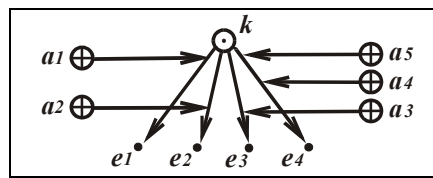
SCBg-текст 3.2.2.8. Пример изображения кортежа, связывающего набор некоторых чисел с их суммой

Очевидно, что противопоставлять друг другу различные слагаемые (например, нумеровать их) нет никакой необходимости.



SCBg-текст 3.2.2.9. Пример изображения кортежа, в котором по крайней мере одно вхождение какого-либо элемента имеет несколько различных атрибутов

Здесь вхождение элемента e_4 в кортеж k имеет два атрибута (атрибут a_4 и атрибут a_5).



3.2.3. Типология кортежей

Ключевые понятия: дуга (знак 2-мощного кортежа); кортеж, все компоненты которого имеют не более одного атрибута; кортеж, все компоненты которого имеют разные атрибуты; классический кортеж; неклассический кортеж; кортеж над предметами; кортеж над узловыми непредметными множествами; кортеж над системами множеств; числовой кортеж; метакортеж (кортеж над кортежами).

Поскольку кортежи являются множествами специального вида, их можно классифицировать по всем общим признакам классификации множеств, которые приведены в подразделе 2.3. Согласно этому, можно выделить:

- 1) по признаку кратности элементов:
 - кортежи без кратных элементов;
 - кортежи с кратными элементами (т.е. кортежи, у каждого из которых имеется по крайней мере один элемент, который входит в состав кортежа более, чем однократно) – см. пример на scbg-тексте 3.2.2.4;
- 2) по признаку рефлексивности:
 - нерефлексивные кортежи;
 - рефлексивные кортежи (т.е. кортежи, каждый из которых включает в число элементов знак самого себя). Очевидно, что рефлексивные кортежи являются достаточно редким видом кортежей;
- 3) по мощности:
 - 2-мощные кортежи (пары);
 - 3-мощные кортежи (тройки);
 - 4-мощные кортежи (четверки);
 - 5-мощные кортежи (пятерки);
 - и т.д.

Знаки 2-мощных кортежей (ориентированных пар) будем называть **дугами**.

Анализ различных вариантов соотношения вхождений элементов в кортежи и соответствующих им атрибутов позволяет выделить следующие классы кортежей:

- 1) по признаку наличия неявно указываемых атрибутов:
 - кортежи, у которых каждому вхождению элемента соответствует по крайней мере один явно указываемый атрибут;
 - кортежи, у которых имеется по крайней мере одно вхождение какого-либо элемента с неявно указываемым атрибутом (т.е. с атрибутом, указываемым по умолчанию);
- 2) по признаку количества атрибутов у компонентов кортежа:
 - кортежи, у которых каждому вхождению каждого элемента соответствует один и только один атрибут (явно или неявно указываемый);
 - кортежи, у которых имеется по крайней мере одно вхождение какого-либо элемента, которому соответствует несколько явно указываемых атрибутов;
- 3) по признаку однозначности атрибутов у компонентов кортежа:
 - кортежи, у которых не существует двух таких вхождений каких-либо элементов, которым соответствует один и тот же явно или неявно задаваемый атрибут (кортежи без симметрии);
 - кортежи, у которых имеется по крайней мере два таких вхождения каких-либо элементов, которым соответствует один и тот же явно или неявно задаваемый атрибут (кортежи с симметрией).

Важнейшим классом кортежей являются **классические кортежи**. Соответственно этому можно выделить класс **неклассических кортежей**, т.е. кортежей, не являющихся классическими.

По виду атрибутов можно выделить:

- кортежи с нечисловыми атрибутами;
- кортежи со смешанными (числовыми и нечисловыми) атрибутами.

По виду элементов кортежей можно выделить:

- кортежи, элементами которых являются знаки предметных множеств;
- кортежи, элементами которых являются знаки узловых непредметных множеств;
- кортежи, являющиеся знаками систем множеств;
- кортежи, элементами которых являются числа;
- кортежи, среди элементов которых имеются знаки кортежей (такие кортежи будем называть метакортежами).

Упражнения к пункту 3.2.3.

Упражнение 3.2.3.1. Могут ли классические кортежи быть неклассическими множествами? Если да, то приведите пример.

Резюме к подразделу 3.2

В заключение рассмотрения понятия кортежа и особенностей его использования в языке SCB необходимо сделать ряд примечаний.

Примечание 1. Почти всегда 2-мощные кортежи (пары) являются классическими, кроме тех случаев, когда какое-либо вхождение какого-либо элемента 2-мощного кортежа имеет несколько явно указываемых атрибутов, а также случаев, когда оба вхождения элементов в 2-мощный кортеж имеют одинаковые атрибуты.

Примечание 2. Если в классическом кортеже один из соответствующих ему атрибутов будет задаваться по умолчанию, то это не превращает указанный кортеж в неклассический.

Примечание 3. Любой кортеж, все атрибуты которого заданы явно, можно заменить на эквивалентный кортеж, в котором один из указанных атрибутов (любой) задается неявно (по умолчанию).

Примечание 4. Любой кортеж с нечисловыми или смешанными атрибутами можно заменить на эквивалентный кортеж с числовыми атрибутами, "пронумеровав" исходные атрибуты.

Примечание 5. Могут существовать кортежи, состоящие из одинаковых элементов, но при наличии хотя бы одного элемента, который входит в разные кортежи под разными атрибутами. Такие по-разному ориентированные кортежи (т.е. кортежи, являющиеся равными множествами, но с разным распределением ролей их элементов) будем называть **встречными**.

кортежами. Примерами встречных кортежей являются **встречные пары**, например, встречные пары принадлежности и соответствующие им встречные scb-дуги. Примерами встречных пар также являются:

- пара, указывающая наличие канала передачи информации из пункта a в пункт b , и пара, указывающая наличие канала передачи информации из пункта b в пункт a (далеко не все пункты имеют двустороннюю связь);
- пара, указывающая наличие гомоморфизма из структуры a в структуру b , и пара, указывающая наличие гомоморфизма из структуры b в структуру a (далеко не для каждой пары гомоморфных структур имеет место обратный гомоморфизм).

Примечание 6. Могут существовать кортежи, которые состоят из одинаковых элементов с одинаковыми атрибутами. Такие кортежи будем называть равными или **кратными кортежами**. Примерами кратных кортежей являются кратные пары, например, кратные пары принадлежности и соответствующие им кратные scb-дуги.

Примечание 7. Могут существовать вырожденные кортежи, в которых все вхождения элементов имеют одинаковые атрибуты.

Примечание 8. Могут существовать кортежи, в которых атрибуты вхождений его элементов однозначно задаются типами этих элементов. В таких кортежах атрибуты можно явно не указывать. В качестве примера таких кортежей можно привести 2-мощный кортеж с атрибутами:

- быть знаком точки, которая лежит на прямой, знак которой является другим компонентом кортежа;
- быть знаком прямой, на которой лежит точка, знак которой является другим компонентом кортежа.

Очевидно, что первым из указанных атрибутов могут обладать только геометрические точки, а вторым – только прямые. Следовательно, если множество *“быть точкой”* и множество *“быть прямой”* будут введены явно, то указанные выше атрибуты можно явно не вводить.

Примечание 9. С формальной точки зрения, каждый атрибут есть множество, каждый элемент которого является знаком пары принадлежности. При этом нет оснований считать ложным обратное утверждение. Другими словами, каждое семантически осмысленное множество, состоящее из знаков пар принадлежности, можно считать атрибутом для соответствующих кортежей. Таким образом, любое множество при соответствующем рассмотрении можно трактовать как кортеж. Поэтому противопоставление неориентированных множеств и кортежей выглядит весьма условно. Неориентированное множество можно трактовать как множество, для элементов которого пока не выявлено различие в ролях этих элементов в рамках этого множества.

Примечание 10. В математической литературе обычно имеют дело с классическими кортежами, использующими числовые атрибуты и изображаемыми в этой литературе следующим образом:

$\square x_1, x_2, \dots, x_n \square$, где x_1 – 1-й компонент кортежа, x_2 – 2-й компонент, ..., x_n – n -й компонент.

3.3. Понятие отношения. Представление отношений в языке SCB. Типология отношений. Классические и неклассические отношения

3.3.1. Обобщение традиционной трактовки отношений

Ключевые понятия и идентификаторы ключевых scb-узлов:
отношение; нормализованное отношение; связка отношения; классическое отношение; отношение.

Каждое отношение общего вида, т.е. отношение, понимаемое в широком смысле слова, представляет собой некоторое семейство однотипных в каком-то смысле множеств. В состав отношений могут входить как неупорядоченные множества, так и кортежи. В частности, каждое отношение классического вида представляет собой множество классических кортежей, имеющих одинаковую арность и использующих одинаковые наборы атрибутов. Переходя от множеств, в частности, кортежей, входящих в состав отношения, к их нормализованным эквивалентам и переходя от трактовки отношения как семейства знаков множеств к его трактовке как семейства знаков множеств, получим нормализованный эквивалент отношения.

Нормализованное отношение – это множество знаков нормализованных множеств, каковыми, в частности, могут быть кортежи. Нормализованное отношение можно трактовать как иерархическую конструкцию, состоящую из следующих уровней:

- знак самого отношения;

- знаки нормализованных множеств, являющиеся элементами отношения (указанные множества могут быть как неупорядоченными множествами, так и кортежами);
- знаки атрибутов, используемых для указания роли элементов в кортежах, знаки которых являются элементами отношения;
- знаки множеств, являющиеся элементами множеств, знаки которых являются элементами отношения.

Множества, знаки которых находятся на четвёртом уровне указанной иерархической конструкции, могут быть либо нормализованными, либо ненормализованными, но тогда обязательно 1-мощными. Как уже отмечалось (см. подраздел 2.1), при нормализации множеств можно оперировать только одним видом ненормализованных множеств – унарными ненормализованными множествами, которые названы предметными множествами.

Особо подчеркнем то, что некоторые знаки, входящие в состав рассмотренной выше многоуровневой конструкции, могут принадлежать сразу нескольким уровням. Так, например, знак отношения может быть элементом кортежа или неориентированного множества, входящего в состав этого же отношения. Кроме того, знак кортежа или неориентированного множества, входящего в состав отношения, может быть элементом как самого этого кортежа или неориентированного множества (см. рефлексивное множество), так и другого кортежа или неориентированного множества, входящего в состав этого же отношения.

Входящие в состав отношения кортежи и неориентированные множества будем называть **связками** этого отношения. Другими словами, связка – это множество, знак которого принадлежит какому-либо нормализованному отношению. Термин "связка" здесь не случаен, т.к. каждое множество (в частности, кортеж), знак которого входит в состав нормализованного отношения, представляет собой описание некоторой конкретной связи между объектами, знаки которых являются элементами связки. При этом тип (семантика) указанной связи определяется отношением, элементом которого является знак соответствующей связки.

В языке SCBg для изображения ориентированных связок (т.е. связок, являющихся кортежами) чаще всего используется графический примитив  (см. пункт 3.2.2). Для изображения знаков неориентированных связок (т.е. связок, являющихся неориентированными множествами) введем еще один графический примитив .

Для сравнения рассмотренной широкой трактовки отношений приведём определение узкой (классической) трактовки отношений. Отношения, соответствующие такой трактовке, будем называть классическими.

Определение 3.3.1.1. Классическое отношение – это множество знаков нормализованных классических кортежей, имеющих одинаковую мощность и использующих одинаковые атрибуты.

Переход от узкой (классической) трактовки отношений к широкой трактовке – это допущение использования в качестве связок не только классических, но и неклассических кортежей, а также неориентированных кортежей, и неориентированных множеств, допущение неодинаковой мощности связок и допущение использования разных атрибутов в разных кортежах.

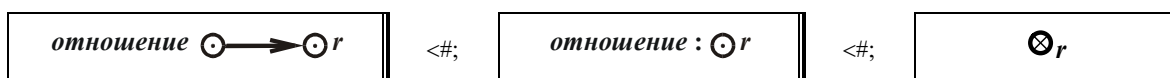
Примерами отношений общего вида можно считать множества, введенные нами в подразделах 2.1, 3.1 и обозначаемые следующими идентификаторами:

- **пара принадлежности** – это отношение, элементами которого являются знаки всевозможных пар принадлежности (в связи с этим вместо имени нарицательного "**пара принадлежности**" можно использовать эквивалентное имя собственное "**Отношение принадлежности**");
- **узловое непредметное множество**;
- **система множеств**;
- **множество пар принадлежности**;
- **множество узловых множеств**;
- **множество без кратных элементов**;
- **множество с кратными элементами**;
- **рефлексивное множество**;
- **нерефлексивное множество**;

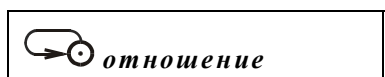
- *1-мощное множество, 2-мощное множество, 3-мощное множество* /* и т.д. */;
- *1-элементное множество, 2-элементное множество* /* и т.д. */;
- *конечное множество, бесконечное множество*;
- *кортеж*;
- *неориентированное множество*.

Введем специальный scb-узел с идентификатором “*отношение*”. Этот узел обозначает множество знаков всевозможных нормализованных отношений (нормализованность отношений в языке SCB подразумевается по умолчанию). Кроме того, в язык SCBg дополнительно введем еще один графический примитив $\otimes$ для изображения знаков конкретных отношений. Введение указанного графического примитива соответствует правилу:

Правило 3.3.1.1. Следующие изображения знака отношения являются эквивалентными:



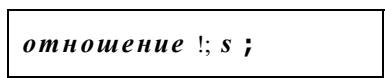
Очевидно, что если подразумевать широкую трактовку понятия отношения, то множество с именем “*отношение*” также следует отнести к числу отношений, т.е. имеет место петля:



Для множества связок отношения и множества классических отношений введём соответственно ключевые scb-узлы “*связка отношения*” и “*классическое отношение*”.

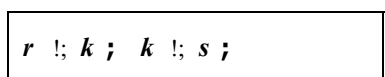
Упражнения к пункту 3.3.1.

Упражнение 3.3.1.1. Приведите пример множества s , которое не является отношением, т.е. множество, для которого не выполняется условие:



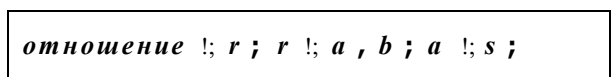
Упражнение 3.3.1.2. Существует ли отношение, являющееся рефлексивным множеством?

Упражнение 3.3.1.3. Существует ли отношение r , для которого имеет место следующее:



Это означает, что связка k отношения r является множеством, одним из элементов которого является знак отношения r .

Упражнение 3.3.1.4. Возможна ли следующая конструкция:



Здесь знак одной из связок отношения r является элементом другой связки этого же отношения.

3.3.2. Типология отношений на основе базовой типологии множеств

Ключевые понятия и идентификаторы ключевых scb-узлов:

ориентированное отношение; неориентированное отношение; частично ориентированное отношение; отношение с кратными связками; отношение без кратных связок; отношение со встречными связками; отношение без встречных связок; семейство множеств одинаковой мощности; семейство множеств неодинаковой мощности; бинарное отношение (семейство 2-мощных множеств); тернарное отношение (семейство 3-мощных множеств); арность отношения; двойная линия со стрелками на обоих концах (графический примитив языка SCBg, изображающий знак неориентированной пары).

Анализ принадлежности связок отношений к числу кортежей позволяет выделить следующие классы отношений:

- **ориентированные отношения** – отношения, все связки которых являются кортежами;
- **неориентированные отношения** – отношения, все связки которых являются неориентированными множествами;
- **частично ориентированные отношения** – отношения, среди связок которых встречаются как кортежи, так и неориентированные множества.

Введём ключевые scb-узлы *“ориентированное отношение”*, *“неориентированное отношение”* и *“частично ориентированное отношение”*, соответственно обозначающие множество ориентированных отношений, множество неориентированных отношений и множество частично ориентированных отношений.

Анализ наличия кратных вхождений элементов в связки отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, все связки которых являются множествами, имеющими кратное вхождение элементов;
- отношения, все связки которых не являются множествами, имеющими кратное вхождение элементов;
- отношения, некоторые связки которых являются множествами, имеющими кратное вхождение элементов.

Анализ наличия кратных связок, входящих в состав отношения, позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, имеющие кратные (равные) связки, – множество таких отношений обозначим scb-узлом *“отношение с кратными связками”*;
- отношения, не имеющие кратных (равных) связок, – множество таких отношений обозначим scb-узлом *“отношение без кратных связок”*.

Примечание. Формально отношение не может быть множеством с кратным вхождением каких-либо элементов. Кратные связки отношения оформляются не путем многократного вхождения знака связки в состав отношения, а путем копирования соответствующей связки, т.е. путём включения знаков равных неориентированных множеств или равных кортежей. Таким образом в scb-тексте могут встречаться равные множества или равные кортежи, но только в том случае, если их знаки являются элементами одного и того же отношения. Целесообразность такого решения обусловлена тем, что равные связки отношения могут иметь разные дополнительные характеристики (например, разные весовые характеристики соответствующих связей).

Кроме кратных (равных) связок могут существовать также встречные связки, т.е. связки, являющиеся встречными кортежами.

Напомним, что **встречные кортежи** – это кортежи, состоящие из одинаковых элементов, по крайней мере один из которых входит в разные (встречные) кортежи под разными атрибутами – см. **подраздел 3.2.**

Анализ наличия встречных связок, входящих в состав отношения, позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, имеющие встречные связки, – множество таких отношений обозначим scb-узлом *“отношение со встречными связками”*;
- отношения, в которых встречные связки отсутствуют, – множество таких отношений обозначим scb-узлом *“отношение без встречных связок”*.

Анализ рефлексивности самих отношений позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, являющиеся рефлексивными множествами (знаки таких отношений имеют петлевую пару принадлежности), – это хоть и экзотический, но вполне реальный класс отношений;
- отношения, не являющиеся рефлексивными множествами.

Анализ рефлексивности связок отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, все связки которых являются рефлексивными множествами;
- отношения, все связки которых не являются рефлексивными множествами;
- отношения, некоторые связки которых являются рефлексивными множествами.

Анализ мощности самих отношений позволяет выделить следующие классы отношений:

- конечные отношения (отношения, являющиеся конечными множествами);
- бесконечные отношения (отношения, являющиеся бесконечными множествами).

Анализ мощности связок отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения со связками одинаковой мощности – множество таких отношений обозначим scb-узлом *“семейство множеств одинаковой мощности”* (см. подраздел 3.1);
- отношения со связками неодинаковой мощности (в каждом таком отношении существуют по крайней мере две связки, имеющие разную мощность) – множество таких отношений обозначим scb-узлом *“семейство множеств неодинаковой мощности”* (см. подраздел 3.1).

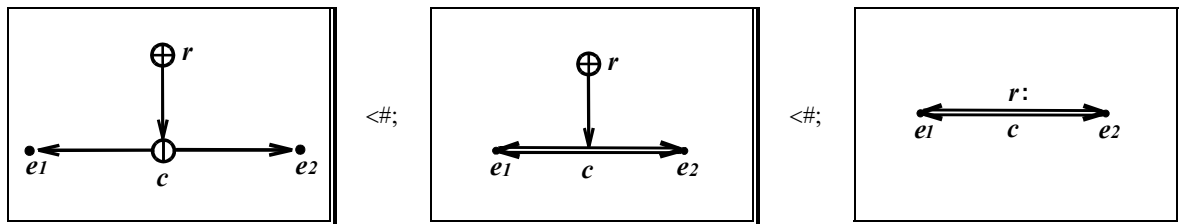
В свою очередь семейство отношений со связками одинаковой мощности разбивается на следующие подклассы:

- бинарные отношения – отношения, все связки которых являются 2-мощными множествами, т.е. мощность которых равна 2 (в частности, 2-мощными кортежами или ориентированными парами), – множество таких отношений обозначим scb-узлом *“бинарное отношение”*;
- тернарные отношения – множество таких отношений обозначим scb-узлом *“тернарное отношение”*;
- 4-арные отношения;
- и т.д.

В связи с вышесказанным отношениям со связками одинаковой мощности можно поставить в соответствие числовую характеристику – **арность отношения**.

Для наглядности изображения 2-мощных неориентированных связок в языке SCBg введём правило:

Правило 3.3.2.1. Следующие изображения 2-мощных неориентированных связок являются эквивалентными:



Здесь scb-узел c , обозначающий 2-мощную неориентированную связку, принадлежащую отношению r , вместе с выходящими из этого узла scb-дугами заменяется на жирную линию без стрелок. Знак 2-мощной неориентированной связки неутраченного типа будем называть **ребром**. Таким образом, в язык SCBg для более наглядного изображения ребер вводится ещё один графический примитив – “жирная двойная линия со стрелками на обоих концах”. Напомним, что для наглядного изображения дуг, не являющихся scb-дугами (знаками пар принадлежности), в язык SCBg был введен специальный графический примитив – двойная линия со стрелкой на одном конце.

3.3.3. Типология отношений на основе типологии кортежей, входящих в состав отношения, а также анализа соотношения между кортежами

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *схема отношения; атрибут по умолчанию; коммутативное отношение; коммутативность (метаотношение, связки которого связывают знак коммутативного отношения с коммутируемыми атрибутами).*

Определение 3.3.3.1. Схемой отношения r будем называть множество знаков всех тех и только тех атрибутов, которые используются в кортежах отношения r . Строгую формальную трактовку понятия схемы отношения как метаотношения, заданного на множестве всевозможных отношений, см. в пункте 3.3.13.

Примечание 1. Если в кортежах отношения используется атрибут, задаваемый по умолчанию, то в схеме этого отношения знак этого атрибута должен быть явно указан, а также явно отнесен к числу элементов специального множества, обозначаемого scb-узлом с идентификатором “*атрибут по умолчанию*”. Указанный scb-узел есть знак множества знаков всевозможных атрибутов, каждый из которых в текущий момент задаётся по умолчанию.

Примечание 2. В состав отношения r могут входить не только знаки кортежей, но и знаки неориентированных множеств.

Примечание 3. Атрибут, знак которого входит в схему отношения r , может использоваться не в каждом кортеже, который входит в состав отношения r .

Каждый атрибут есть не что иное, как бинарное ориентированное отношение, являющееся подмножеством базового для языка SCB отношения принадлежности, т. е. множества знаков всевозможных пар принадлежности.

В качестве примера схемы отношения приведем схему тернарного классического отношения сложения. Эта схема представляет собой множество, включающее в себя знаки следующих атрибутов:

- *сумма_ (быть суммой_)* ;
- *слагаемое1_ (быть 1-м слагаемым_)* ;
- *слагаемое2_ (быть 2-м слагаемым_)* .

Примечание 4. Строго говоря, любое неориентированное множество можно “превратить” в кортеж, “подметив” какую-то особенность хотя бы одного из элементов этого множества по сравнению с другими его элементами. Поэтому, когда вводится какое-либо ориентированное отношение, необходимо явно перечислить те атрибуты, которые в этом отношении учитываются, т.е. необходимо для каждого неориентированного отношения явно указывать его схему. Это значит, что все атрибуты, не указанные в схеме отношения, при анализе этого отношения будут игнорироваться. Таким образом, могут существовать неориентированные отношения, включающие в себя кортежи (в этом случае атрибуты этих кортежей вообще не учитываются). Некоторые кортежи могут входить в разные отношения, в которых используются разные схемы (для 1-го отношения в этом кортеже будут учитываться одни атрибуты, а для 2-го отношения – другие).

Анализ включения атрибута, задаваемого по умолчанию, в состав схемы отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, использующие атрибут, задаваемый по умолчанию;
- отношения, не использующие атрибут, задаваемый по умолчанию.

Анализ того, в каждой ли связке отношения используются все атрибуты из схемы этого отношения, позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, все связки которых используют одинаковые атрибуты;
- отношения, у которых имеются по крайней мере две связки с различными наборами атрибутов.

Анализ соотношения вхождений элементов в связки отношения и соответствующих им атрибутов позволяет выделить следующие классы отношений:

1)

- отношения, в каждой связке которых каждому вхождению элемента соответствует один и только один атрибут;
- отношения, в каждой связке которых существует по крайней мере одно вхождение какого-либо элемента, которому соответствует несколько атрибутов;
- отношения, в некоторых связках которых каждому вхождению элемента соответствует один и только один атрибут, а в некоторых связках которых существует по крайней мере одно вхождение какого-либо элемента, которому соответствует несколько атрибутов;

2)

- отношения, в каждой связке которых не существует двух таких вхождений элементов, которым соответствует один и тот же атрибут;
- отношения, в каждой связке которых существуют по крайней мере два таких вхождения элементов, которым соответствует один и тот же атрибут;
- отношения, в некоторых связках которых не существует двух таких вхождений элементов, которым соответствует один и тот же атрибут, а в некоторых связках которых существуют по крайней мере два таких вхождения элементов, которым соответствует один и тот же атрибут.

Определение 3.3.3.2. Множество r будем называть **коммутативным отношением** для атрибутов ai и aj в том и только том случае, если справедливы следующие высказывания:

- множество r является ориентированным отношением, в схему которого входят атрибут ai и атрибут aj ;
- кортеж отношения r содержит не более одного элемента под атрибутом ai и не более одного элемента под атрибутом aj ;
- если в кортеж отношения r входит элемент под атрибутом ai , то в этот же кортеж входит элемент под атрибутом aj и наоборот;
- если в кортеж отношения r входят элемент xi под атрибутом ai и элемент xj под атрибутом aj , то в отношение r будет входить кортеж, в который элемент xi входит под атрибутом ai , а элемент xj – под атрибутом aj . При этом все остальные элементы указанных кортежей совпадают и входят в эти кортежи под одинаковыми атрибутами.

Множеству коммутативных отношений сопоставим ключевой scb-узел “**коммутативное отношение**”.

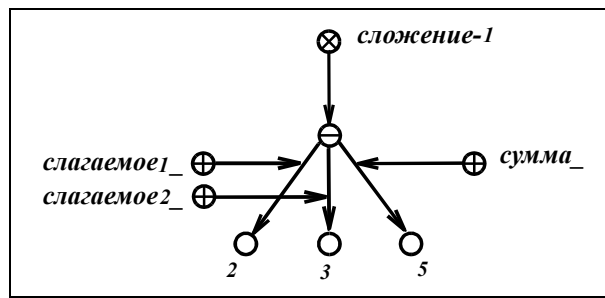
Примечание 5. Если отношение r является коммутативным для атрибутов ai и aj , то от отношения r можно перейти к эквивалентному отношению r^* путем:

- ликвидации любого из двух встречных кортежей, которые отличаются только двумя компонентами, имеющими атрибуты ai и aj причем ai – компонент одного из указанных кортежей совпадает с aj – компонентом другого кортежа;
- склеивания знаков атрибутов ai и aj .

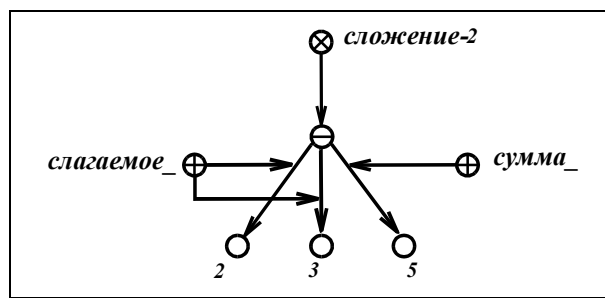
В результате этого эквивалентного преобразования сокращаются количество связей отношения и количество используемых атрибутов.

Приведём несколько вариантов представления отношения сложения.

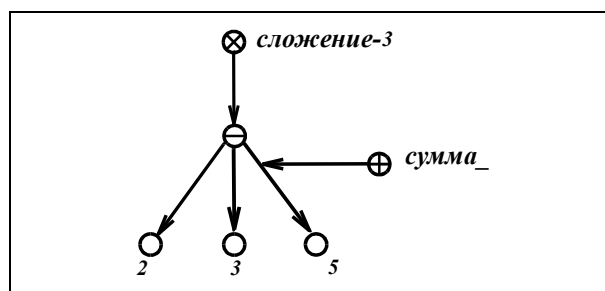
SCBg-текст 3.3.3.1. Вариант 1
изображения отношения сложения
Это классическое тернарное
коммутативное отношение с атрибутами
“*слагаемое1_*”, “*слагаемое2_*”,
сумма_”.



SCBg-текст 3.3.3.2. Вариант 2 изображения отношения сложения
Это неклассическое тернарное ориентированное отношение, в каждом кортеже которого используются два атрибута: “*слагаемое_*”, “*сумма_*”.

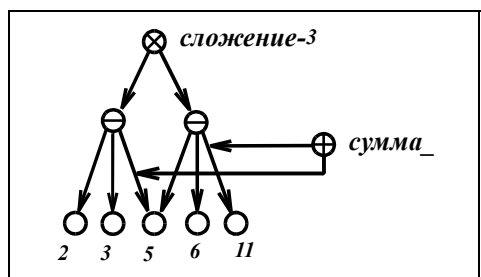


SCBg-текст 3.3.3.3. Вариант 3 изображения отношения сложения
Это неклассическое тернарное ориентированное отношение, отличающееся от отношения “*сложение-2*” только тем, что в каждом его кортеже используются один атрибут по умолчанию и один атрибут явно (“*сумма_*”).

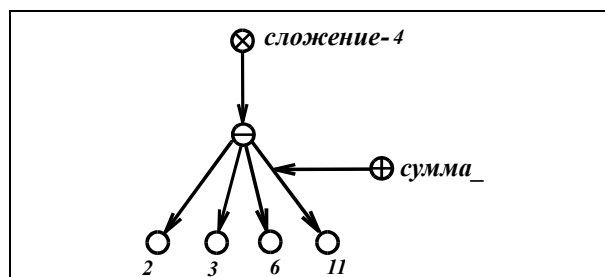


Очевидно, что для компактности изображения scb-текстов здесь целесообразнее задавать по умолчанию атрибут “*слагаемое_*”, а не атрибут “*сумма_*”, т.к. каждый кортеж рассматриваемого отношения имеет несколько компонентов с атрибутом “*слагаемое_*” и только один компонент с атрибутом “*сумма_*”.

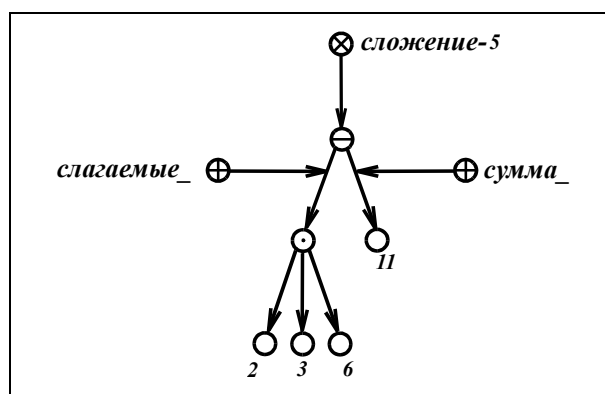
SCBg-текст 3.3.3.4. Вариант 4 изображения отношения сложения (неклассическое ориентированное отношение, кортежи которого имеют в общем случае различную мощность – от 3 и выше)



<#;



SCBg-текст 3.3.3.5. Вариант 5 изображения отношения сложения (классическое бинарное отношение с атрибутами “*сумма_*” и “*слагаемые_*”)



Можно привести еще вариант 6 изображения отношения сложения в виде бинарного ориентированного отношения, отличающегося от отношения “*сложение-5*” тем, что в нем один из атрибутов задается по умолчанию.

3.3.4. Типология отношений на основе понятия проекции и понятия области определения

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *область определения; домен (унарная проекция); проекция отношения; отношение с попарно непересекающимися доменами; отношение с совпадающими доменами; отношение над множествами; отношение над кортежами; метаотношение (отношение над отношениями); числовое отношение; геометрическое отношение; темпоральное отношение.*

Определение 3.3.4.1. Область определения отношения r — это множество всех тех и только тех объектов, которые являются элементами связок отношения r . В языке SCB понятие области определения ставится в соответствие отношению с именем “*область определения*”. Строгая формальная трактовка понятия области определения как метаотношения будет рассмотрена ниже в [пункте 3.3.13](#).

Определение 3.3.4.2. Домен (унарная проекция) отношения r по атрибуту ai — это множество всех тех и только тех объектов, которые являются такими элементами связок отношения r , вхождения которых в эти связки имеют атрибут ai . В языке SCB понятие домена ставится в соответствие метаотношению с именем “*домен*”. См. [пункт 3.3.13](#).

Примечание. Домен отношения по заданному атрибуту не требует того, чтобы связки указанного отношения имели только один элемент с указанным атрибутом. Таких элементов может быть сколько угодно.

Очевидно, что все элементы каждого домена отношения r являются также элементами области определения этого отношения.

Определение 3.3.4.3. Проекция отношения r по атрибутам $a1, a2, \dots, am$ — это множество знаков всех тех и только тех кортежей, которые строятся из кортежей отношения r путём удаления всех вхождений элементов, которые имеют атрибуты, не совпадающие с указанными выше атрибутами $a1, a2, \dots, am$, а также путем последующего устранения кратности кортежей (из семейства кратных кортежей в указанном множестве кортежей должен оставаться один представитель). В языке SCB понятие проекции отношения ставится в соответствие метаотношению с именем “*проекция отношения*”.

Очевидно, что неунарная проекция заданного отношения r также является отношением, причём ориентированным отношением со схемой $a1, a2, \dots, am$.

Анализ соотношения доменов (унарных проекций) каждого отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, в каждом из которых домены являются попарно непересекающимися множествами, т.е. множествами, которые не имеют общих элементов (назовем такие отношения **отношениями с попарно непересекающимися доменами**);
- отношения, в которых имеются по крайней мере два домена с общими элементами;
- отношения, в каждом из которых все домены совпадают.

Примечание. Ориентированное отношение с попарно непересекающимися унарными проекциями можно заменить на эквивалентное неориентированное отношение путем замены явно указываемых атрибутов исходного отношения на явное указание принадлежности элементов связок отношения к соответствующей унарной проекции. Например, ориентированное отношение, связки которого имеют смысл «точка t лежит на прямой p » можно заменить на эквивалентное отношение, связки которого имеют смысл «геометрические объекты t и p инцидентны друг другу». Если при этом дополнительно будет указано к какому классу геометрических объектов (к классу точек или к классу прямых) относятся объекты t и p , то будет очевидно, какой из указанных объектов на каком находится (прямая не может лежать на точке!).

В соответствии с приведенной выше классификацией для обозначения конкретных типов отношений введем следующие ключевые scb-узлы: “*отношение с попарно непересекающимися доменами*”, “*отношение с совпадающими доменами*”.

Анализ того, какая теоретико-множественная связь имеет место между областью определения отношения и самим отношением, позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, у которых знак каждой связки является элементом их области определения (каждое такое отношение является подмножеством собственной области определения). Элементами некоторых связок такого отношения являются знаки связок этого же отношения;
- отношения, у которых знаки некоторых (не всех) связок являются элементами их области определения (каждое такое отношение пересекается с собственной областью определения, но не является её подмножеством);
- отношения, знаки связок которых не входят в состав области определения этих отношений.

Анализ того, входит или нет знак отношения в состав собственной области определения, позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, у которых некоторые связки содержат в качестве хотя бы одного из своих элементов знак самого этого отношения;
- отношения, у которых нет связок, содержащих в качестве элемента знак самого этого отношения.

Содержательный анализ области определения отношений позволяет выделить следующие классы отношений:

- **отношения над множествами** – в область определения каждого такого отношения входят знаки всевозможных множеств;
- **отношения над кортежами** – в область определения каждого такого отношения входят знаки всевозможных кортежей; при этом в состав каждой связки такого отношения входит знак по крайней мере одного кортежа, т.е. элементами рассматриваемых связок являются знаки других связок;
- **отношения над отношениями** того или иного типа (**метаотношения**) – в область определения каждого такого отношения входят знаки всевозможных отношений соответствующего типа; при этом в состав каждой связки такого отношения входит знак по крайней мере одного отношения;
- **числовые отношения** – отношения над числами и числовыми отношениями;
- **геометрические отношения** – отношения над геометрическими фигурами;
- **темпоральные отношения** – отношения, описывающие связи во времени;
- и др.

В соответствии с приведенной выше классификацией для обозначения конкретных типов отношений введем следующие ключевые scb-узлы: “*отношение над множествами*”, “*отношение над кортежами*”, “*метаотношение*” (и его синоним “*отношение над отношениями*”), “*числовое отношение*”, “*геометрическое отношение*”, “*темпоральное отношение*”.

Упражнения к пункту 3.3.4.

Упражнение 3.3.4.1. Запишите на языках SCBg и SCBs высказывание о том, что множество s является областью определения некоторого отношения r .

Упражнение 3.3.4.2. Запишите на языках SCBg и SCBs высказывание о том, что множество U является областью определения отношения “*область определения*”. Является ли указанное множество U универсальным множеством?

Упражнение 3.3.4.3. Все ли отношения (как классические, так и неклассические) имеют область определения? Если да, то как этот факт записывается на языках SCBg и SCBs?

3.3.5. Типология отношений на основе понятия функциональной зависимости

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *функциональная зависимость; отношения без функциональных зависимостей; отношения с одной функциональной зависимостью; отношения с несколькими функциональными зависимостями; ключевая функциональная зависимость; ключ отношения; отношение без ключей; отношение с одним ключом; отношение с несколькими ключами; функция; декартово произведение; отношение без функций; отношение с одной функцией; отношение с несколькими функциями; взаимно однозначное бинарное отношение; алгебраическая операция.*

Определение 3.3.5.1. Будем говорить, что отношение r имеет **функциональную зависимость** атрибутов $au_1, \dots, au_t$ от атрибутов $ax_1, \dots, ax_n$ в том и только в том случае, если:

- указанные множества атрибутов не имеют общих элементов;
- все перечисленные атрибуты входят в схему отношения r ;
- в отношении r не существует двух таких кортежей, у которых бы совпадали элементы, имеющие атрибуты из множества $\{ax_1, \dots, ax_n\}$, но не совпадали элементы, имеющие атрибуты из множества $\{au_1, \dots, au_t\}$.

Другими словами, те элементы кортежа, входящего в отношение r , которые имеют атрибуты из множества $\{ax_1, \dots, ax_n\}$, однозначно определяют другие элементы этого же кортежа, имеющие атрибуты из множества $\{au_1, \dots, au_t\}$ [330] (Мейер Д.1987кн-ТеориРБД). Атрибуты из множества $\{ax_1, \dots, ax_n\}$ будем называть атрибутами аргументов функциональной зависимости, а атрибуты из множества $\{au_1, \dots, au_t\}$ – атрибутами результата функциональной зависимости. Минимальное число атрибутов аргументов и атрибутов результата равно 1.

Анализ наличия функциональных зависимостей в отношениях позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения без функциональных зависимостей;
- отношения с одной функциональной зависимостью;
- отношения с несколькими функциональными зависимостями.

Определение 3.3.5.2. Функциональную зависимость атрибутов $au_1, \dots, au_t$ от атрибутов $ax_1, \dots, ax_n$ в рамках отношения r будем называть **ключевой функциональной зависимостью** в том и только в том случае, если в схеме отношения r не существует ни одного атрибута, который бы не принадлежал либо множеству $\{au_1, \dots, au_t\}$, либо множеству $\{ax_1, \dots, ax_n\}$.

Множество атрибутов аргументов ключевой функциональной зависимости иногда называют **ключом заданного отношения**.

Из приведенного определения следует, что для любых двух различных кортежей ki и kj , входящих во множество r , существует атрибут axe из множества $\{ax_1, \dots, ax_n\}$ такой, что элемент кортежа ki с атрибутом axe не совпадает с элементом кортежа kj , имеющим тот же атрибут. Другими словами, в отношении r не существует двух таких кортежей, в которых бы совпадали элементы с атрибутами из множества $\{ax_1, \dots, ax_n\}$ и не совпадали элементы, имеющие остальные атрибуты [330] (Мейер Д.1987кн-ТеориРБД). Это означает, что для кортежей, принадлежащих отношению r , элементы, имеющие атрибуты из множества $\{ax_1, \dots, ax_n\}$, однозначно определяют все остальные элементы кортежа, т.е. однозначно определяют весь кортеж.

Анализ наличия ключевых функциональных зависимостей в отношениях позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения без ключей;
- отношения с одним ключом;
- отношения с несколькими ключами.

Определение 3.3.5.3. Ключевую функциональную зависимость отношения r будем называть **функцией** в том и только в том случае, если:

- количество атрибутов результатов этой ключевой зависимости равно 1 – обозначим этот единственный атрибут результата функциональной зависимости через ay ;
- в каждом кортеже отношения r существует не более одного компонента с атрибутом ay ;
- проекция отношения r по атрибутам $ax_1, \dots, ax_n$ в случае, если количество указанных атрибутов больше 1, представляет собой декартово произведение.

Примечание. Определение декартова произведения см. в [пункт 3.3.7](#).

Функцию n -арного отношения будем называть **$(n - 1)$ -арной функцией**.

Заметим, что каждая функциональная зависимость бинарного ориентированного отношения является ключевой функциональной зависимостью, а также функцией.

Анализ наличия функций в отношениях позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, не имеющие функций;
- отношения, имеющие одну функцию;
- отношения, имеющие несколько функций.

Определение 3.3.5.4. **Взаимно однозначным отношением** будем называть бинарное ориентированное отношение, которому соответствуют две различные функции.

Определение 3.3.5.5. Функцию отношения r будем называть **алгебраической операцией** в том и только в том случае, если отношение r принадлежит к классу отношений, у которых все домены совпадают (см. [пункт 3.3.4](#)).

3.3.6. Представление и типология классических отношений

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *классическое отношение; неклассическое отношение.*

Понятие классического нормализованного отношения было дано выше (см. определение [3.3.1.1](#)). Важной особенностью классического отношения является то, что его можно представить в виде таблицы, столбцы которой соответствуют используемым атрибутам, а строки – кортежам, входящим в состав отношения. Элементы кортежей в этой таблице представляются именами (идентификаторами) соответствующих объектов. Таблицы указанного вида являются основой для реляционных моделей баз данных [\[330\]](#) (*Мейер Д.1987кн-ТеорияРБД*). Поэтому эти таблицы иногда называют реляционными.

Каждое классическое отношение есть множество знаков классических кортежей, имеющих одинаковую мощность и одинаковые атрибуты.

Классическим отношениям противопоставляются **неклассические отношения**, в состав которых могут входить:

- как кортежи, так и неориентированные множества;
- множества разной мощности;
- как классические, так и неклассические кортежи;
- кортежи, использующие разные наборы атрибутов.

Для множества неклассических отношений введём ключевой scb-узел **“неклассическое отношение”**.

Классические отношения в математической литературе обычно называют просто отношениями. Неклассические отношения не являлись предметом серьезного анализа, т.к. они легко представимы в виде эквивалентных отношений классического вида. Но поскольку в интеллектуальных системах важное значение имеет не только факт представимости, но и удобство (в частности, компактность) представления, некоторые классические отношения в памяти интеллектуальных систем целесообразно представлять в виде эквивалентных неклассических отношений.

Упражнение 3.3.6.1. Построить реляционные таблицы фрагментов (подмножеств) некоторых отношений, например, отношения сложения, отношения умножения, генеалогических отношений, отношения, связывающего страны с их столицами, отношения, связывающего выполняемые проекты с их исполнителями, и т.д.

3.3.7. Отношения предельного вида

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *булеан; множество всевозможных перестановок; множество сочетаний; шкала множеств; универсум; минимальное декартово произведение классического отношения; декартова степень (декартово произведение, все домены которого совпадают).*

Каждое конкретное отношение, относящееся к классу “*отношение предельного вида*”, представляет собой семейство знаков всевозможных множеств, удовлетворяющих какому-то конкретному требованию (свойству). К такому классу отношений, в частности, можно отнести:

- семейство знаков всевозможных классических кортежей, каждый из которых использует один и тот же (заданный) набор атрибутов, для которого фиксируется (задается), во-первых, набор атрибутов и, во-вторых, набор множеств, однозначно соответствующих указанному набору атрибутов. При этом каждый из указанных выше классических кортежей должен удовлетворять следующим требованиям: (1) использовать все те и только те атрибуты, которые указаны выше, и (2) каждый компонент кортежа должен являться элементом того из указанных выше множеств, которое соответствует атрибуту, которым отмечен этот компонент;
- множество всевозможных классических кортежей (“предельный” характер этого отношения заключается в том, что оно является объединением всевозможных классических отношений);
- множество всевозможных кортежей (необязательно классических) – это отношение представляет собой объединение всевозможных ориентированных отношений.

Список такого рода отношений можно продолжить, но кроме таких конкретных отношений предельного вида существует целый ряд классов отношений предельного вида. К таким классам отношений можно отнести следующие:

- декартовы произведения (прямые произведения);
- булеаны;
- отношения, каждое из которых является множеством всевозможных перестановок из заданного набора элементов;
- отношения, каждое из которых является множеством всевозможных сочетаний заданной мощности из заданного набора элементов;
- шкалы множеств;
- отношения, каждое из которых является универсумом, построенным на заданном множестве.

Определение 3.3.7.1. Отношение d является **декартовым произведением** в том и только в том случае, если:

- отношение d является классическим отношением с атрибутами $a_1, a_2, \dots, a_n$;
- в состав отношения d входит каждый кортеж вида $\square a_1 : x_1i, a_2 : x_2i, \dots, a_n : x_ni \square$, где x_1i есть элемент множества, являющегося доменом отношения d по атрибуту a_1 ; x_2i есть элемент множества, являющегося доменом отношения d по атрибуту a_2 и т.д., x_ni есть элемент множества, являющегося доменом отношения d по атрибуту a_n .

Из данного определения следует, что в состав отношения d не входят неориентированные множества (т.к. это отношение является классическим), а также никакие другие кортежи кроме тех, которые указаны выше. Добавление кортежей приведет либо к нарушению классического характера отношения d , либо к расширению множеств, являющихся его унарными проекциями. Множество отношений, являющихся декартовым произведением, будем обозначать ключевым scb-узлом “*декартово произведение*”.

Очевидно, что каждому классическому отношению можно поставить в соответствие целое семейство декартовых произведений, являющихся надмножествами этого классического отношения. При этом очевидно, что в указанном семействе декартовых произведений существует **минимальное декартово произведение**, т.е. такое декартово произведение, которое является подмножеством всех остальных декартовых произведений, входящих в это семейство. Для каждого классического

отношения существует единственное такое минимальное декартово произведение. Классическое отношение и соответствующее ему минимальное декартово произведение имеют одинаковые атрибуты и для каждого атрибута – совпадающие унарные проекции. Каждое декартово произведение, являющееся надмножеством заданного классического отношения, но не являющееся для этого классического отношения минимальным декартовым произведением, имеет по крайней мере одну унарную проекцию, которая является надмножеством соответствующей унарной проекции (т.е. проекции по тому же атрибуту) заданного классического отношения. Остальные унарные проекции рассматриваемого декартова произведения либо совпадают с соответствующими унарными проекциями заданного классического отношения, либо являются их надмножествами, но никогда не могут быть их подмножествами.

Заметим, что классическое отношение можно определить как отношение, для которого существует декартово произведение, подмножеством которого это отношение является.

Поскольку каждое декартово произведение однозначно задаётся его схемой (набором используемых атрибутов) и набором всех его унарных проекций, легко ввести соответствующие условные обозначения декартовых произведений. Пусть отношение d представляет собой бинарное декартово произведение, пусть a_1 и a_2 – атрибуты, используемые отношением d , и пусть x_1 есть домен отношения d по атрибуту a_1 . Введём следующее условное обозначение бинарного декартова произведения: $d = (x_1(a_1) \times x_2(a_2))$.

Тернарное декартово произведение будем обозначать следующим образом:

$$(x_1(a_1) \times x_2(a_2) \times x_3(a_3)).$$

Аналогичным образом обозначаются декартовы произведения любой другой арности. Указанные условные обозначения декартовых произведений разрешено использовать в языке SCBs. Заметим, что заданные множества $x_1, x_2, \dots, x_n$, являющиеся унарными проекциями декартова произведения, могут иметь между собой самые различные теоретико-множественные соотношения. В частности, все эти множества могут совпадать. В этом случае декартово произведение называют **n -й декартовой степенью** заданного множества, где число n есть арность такого декартова произведения. Множество декартовых степеней будем обозначать scb-узлом **“декартова степень”**.

Рассмотрим классическое отношение, у которого:

- отсутствуют связки с кратными вхождениями элементов;
- все его связки являются встречными друг другу, т.е. являются кортежами, имеющими одинаковые элементы, но входящими в кортежи под различными атрибутами.

Примечание. Поскольку рассматриваемое отношение является классическим, кратные связки в нем отсутствуют.

Очевидно, что у такого отношения все элементы его области определения входят в состав каждого его кортежа. Очевидно также, что для заданной области определения существует несколько отношений, обладающих указанными выше свойствами. Но существует одно, которое можно считать отношением предельного вида и которое будем называть множеством всех перестановок из заданного набора элементов.

Определение 3.3.7.2. Отношение p будем называть **множеством перестановок** в том и только в том случае, если оно обладает следующими свойствами:

- является классическим отношением;
- не имеет связок с кратными вхождениями элементов;
- все его связки являются встречными друг другу (т.е. любые две связки отношения p являются встречными кортежами);
- каждый встречный кортеж любого кортежа, входящего в отношение p , также входит в состав отношения p .

Очевидно, что отношение, принадлежащее к классу множеств перестановок, однозначно определяется: (1) своей областью определения и (2) своей схемой, т.е. набором используемых атрибутов. Следовательно, для построения отношения рассматриваемого класса достаточно знать его область определения и его схему. При этом заметим, что мощность области определения для каждого отношения рассматриваемого класса совпадает с количеством используемых в нем атрибутов. Заметим также, что если для заданного канторовского множества s построить его n -ую декартову степень (где n есть мощность множества s) и после этого исключить все кортежи, имеющие кратные элементы, то полученное отношение будет принадлежать к классу множеств перестановок.

Определение 3.3.7.3. Рассмотрим семейство неориентированных отношений, не имеющих кратных связей и не имеющих связей с кратными вхождениями элементов. Для такого семейства отношений можно построить минимальное “отношение предельного вида”, являющееся подмножеством для всех отношений, удовлетворяющих указанным выше свойствам. Для этого достаточно (1) построить множество, являющееся результатом объединения областей определения всех отношений, входящих в состав заданного семейства неориентированных отношений, (2) для построенного множества построить семейство всевозможных его подмножеств. Указанное отношение предельного вида будем называть **булеаном**.

Определение 3.3.7.4. Рассмотрим семейство m -арных неориентированных отношений, не имеющих кратных связей и не имеющих связей с кратными вхождениями элементов. Для такого семейства отношений также можно построить минимальное отношение предельного вида, т.е. минимальное отношение, являющееся надмножеством для всех отношений, удовлетворяющих указанным выше свойствам. Для этого необходимо (1) построить множество, являющееся объединением областей определения всех отношений, входящих в состав заданного семейства неориентированных отношений, (2) для построенного множества построить семейство всевозможных его подмножеств, имеющих мощность, равную m . Указанное отношение предельного вида будем называть **множеством сочетаний** из заданного множества по m элементов.

Для семейства множеств всевозможных перестановок, семейства множеств сочетаний и семейства булеанов в языке SCB вводятся следующие ключевые узлы: “*множество перестановок*”, “*множество сочетаний*”, “*булеан*”.

Упражнение 3.3.7.1. Могут ли существовать разные классические отношения, у которых совпадают минимальные декартовы произведения? Если да, то приведите примеры.

3.3.8. Типология бинарных отношений и метаотношения над ними

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *бинарное отношение*; *бинарное ориентированное отношение* (классическое бинарное отношение); *бинарное неориентированное отношение*; *бинарное отношение без функций*; *бинарное отношение с одной функцией*; *взаимно однозначное бинарное отношение* (бинарное отношение с двумя функциями); *рефлексивное бинарное отношение*; *иррефлексивное бинарное отношение*; *частично рефлексивное бинарное отношение*; *симметричное бинарное отношение*; *антисимметричное бинарное отношение*; *частично симметричное бинарное отношение*; *транзитивное бинарное отношение*; *антитранзитивное бинарное отношение*; *частично транзитивное бинарное отношение*; *отношение эквивалентности* (рефлексивное, симметричное и транзитивное); *отношение предпорядка* (рефлексивное и транзитивное); *отношение частичного порядка* (рефлексивное, антисимметричное и транзитивное); *отношение линейного порядка* (подкласс отношений частичного порядка).

Определение 3.3.8.1. Функциональные (однозначные) бинарные отношения – это бинарные отношения, для которых существует по крайней мере одна унарная функция, т.е. по крайней мере один атрибут, являющийся ключом (см. пункт 3.3.5).

К числу бинарных ориентированных отношений, использующих числовые атрибуты $1_$ (быть 1-м компонентом кортежа) и $2_$ (быть 2-м компонентом кортежа), относятся следующие уже рассмотренные выше базовые отношения языка SCB:

- отношение принадлежности (множество знаков всевозможных пар принадлежности);
- отношение не принадлежности (множество знаков всевозможных пар непринадлежности);
- отношение нечёткой принадлежности (множество знаков всевозможных пар нечёткой принадлежности);
- универсальное бинарное ориентированное отношение с атрибутами $1_$ и $2_$ (множество знаков всевозможных ориентированных пар неуточняемого типа).

Определение 3.3.8.2. Отношение r является **рефлексивным бинарным отношением** в том и только в том случае, если:

- 1) оно является бинарным отношением со схемой $\{ai, aj\}$;
- 2) для каждого x из области определения отношения r кортеж $\square ai : x, aj : x \square$ принадлежит этому отношению.

Примером рефлексивного бинарного отношения: является отношение с именем “*включение множества*” (см. пункт 3.3.11).

Определение 3.3.8.3. Отношение r является **иррефлексивным бинарным отношением** в том и только в том случае, если:

- 1) оно является бинарным отношением;
- 2) в рамках отношения r не существует ни одного кортежа, элементы (компоненты) которого бы совпадали.

Определение 3.3.8.4. Отношение r является **частично рефлексивным бинарным отношением** в том и только в том случае, если:

- 1) оно является бинарным отношением;
- 2) в рамках отношения r существуют петли, т. е. такие кортежи, элементы (компоненты) которых совпадают (отношение r не является иррефлексивным бинарным отношением);
- 3) оно не является рефлексивным бинарным отношением.

Определение 3.3.8.5. Отношение r является **симметричным бинарным отношением** в том и только в том случае, если:

- 1) оно является бинарным отношением со схемой $\{ai, aj\}$;
- 2) для каждого кортежа $\square ai : x, aj : y \square$ из отношения r справедливо, что кортеж $\square ai : y, aj : x \square$ также принадлежит этому отношению (x не совпадает с y).

Определение 3.3.8.6. Отношение r является **антисимметричным бинарным отношением** в том и только в том случае, если:

- 1) оно является бинарным отношением со схемой $\{ai, aj\}$;
- 2) выполняется условие: если кортеж $\square ai : x, aj : y \square$ принадлежит отношению r и кортеж $\square ai : y, aj : x \square$ также принадлежит r , то $x = y$.

Определение 3.3.8.7. Отношение r является **частично симметричным бинарным отношением** в том и только в том случае, если:

- 1) оно является бинарным отношением со схемой $\{ai, aj\}$;
- 2) существует, по крайней мере, один кортеж $\square ai : x, aj : y \square$, принадлежащий бинарному отношению r , для которого существует кортеж $\square ai : y, aj : x \square$, также принадлежащий отношению r ;
- 3) существует, по крайней мере, один кортеж $\square ai : x, aj : y \square$, принадлежащий бинарному отношению r , для которого не существует кортежа $\square ai : y, aj : x \square$, принадлежащего отношению r .

Определение 3.3.8.8. Отношение r является **транзитивным бинарным отношением** в том и только в том случае, если:

- 1) оно является бинарным отношением со схемой $\{ai, aj\}$;
- 2) для любых x, y, z из области определения отношения r справедливо, что если кортежи $\square ai : x, aj : y \square$ и $\square ai : y, aj : z \square$ принадлежат отношению r , то и кортеж $\square ai : x, aj : z \square$ также принадлежит r .

Определение 3.3.8.9. Отношение r является **антитранзитивным бинарным отношением** в том и только в том случае, если:

- 1) оно является бинарным отношением со схемой $\{ai, aj\}$;
- 2) для любых x, y, z из области определения отношения r справедливо, что если кортежи $\square ai : x, aj : y \square$ и $\square ai : y, aj : z \square$ принадлежат отношению r , то не найдётся кортежа $\square ai : x, aj : z \square$, также принадлежащего r .

Определение 3.3.8.10. Частично транзитивные отношения – это бинарные отношения, которые не являются ни транзитивными, ни антитранзитивными.

Определение 3.3.8.11. Бинарные отношения эквивалентности – это бинарные отношения, обладающие свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Определение 3.3.8.12. Бинарные отношения предпорядка – это бинарные отношения, обладающие свойствами рефлексивности, транзитивности.

Определение 3.3.8.13. Бинарные отношения частичного порядка – это бинарные отношения, обладающие свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности.

Определение 3.3.8.14. Отношение r является отношением **линейного порядка** в том и только в том случае, если:.

- оно является отношением частичного порядка с атрибутами ai и aj ;
- для любых двух разных элементов x и y из области определения отношения r имеет место принадлежность отношению r либо кортежа $\square ai : x, aj : y \square$, либо кортежа $\square ai : y, aj : x \square$. То есть любые два элемента из области определения отношения r сравнимы.

Всем вышеперечисленным типам отношений в языке SCB сопоставляются ключевые узлы, обозначающие, множества отношений соответствующего типа: *“рефлексивное бинарное отношение”*, *“иррефлексивное бинарное отношение”*, *“частично рефлексивное бинарное отношение”*, *“симметричное бинарное отношение”*, *“антисимметричное бинарное отношение”*, *“частично симметричное бинарное отношение”*, *“транзитивное бинарное отношение”*, *“антитранзитивное бинарное отношение”*, *“частично транзитивное бинарное отношение”*, *“отношение эквивалентности”*, *“отношение предпорядка”*, *“отношение частичного порядка”*, *“отношение линейного порядка”*.

Множество знаков всевозможных пар принадлежности, которое будем называть **отношением принадлежности**, является для языка SCB базовым отношением, с помощью которого в языке SCB осуществляется представление всех математических структур (множеств, кортежей, отношений). Таким образом, язык SCB осуществляет представление математических структур (в частности отношений) путем их сведения к отношению принадлежности. Оно является бинарным ориентированным отношением частично транзитивным, частично симметричным, частично рефлексивным. Отношение принадлежности относится к классу бинарных отношений, знаки пар которого представляются в языке SCB специальным образом – в виде scb-дуг.

Каждое семейство знаков пар принадлежности (в частности, каждый атрибут какого-либо отношения) также представляет собой для языка SCB не что иное, как специальным образом задаваемое бинарное ориентированное отношение, являющееся некоторым подмножеством отношения принадлежности. В языке SCBg знаки таких отношений изображаются графическим примитивом “кружок с плюсом” – $\oplus$.

3.3.9. Множество соответствий как метаотношение, заданное на множестве бинарных ориентированных отношений

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *соответствие*; *отношение_*; *атрибут_*; *отображение*, *проекция_*; *сюръекция*; *однозначное соответствие* (*функциональное соответствие*); *аргумент_*; *взаимно однозначное соответствие* (*функциональное отображение*); *инъекция*; *биекция* (*однозначная сюръекция*, *функциональная сюръекция*); *взаимно однозначное отображение*; *взаимно однозначная сюръекция*.

Каждое конкретное **соответствие** между двумя множествами будем трактовать как тернарный кортеж, связывающий:

- 1) знак некоторого бинарного отношения – этому знаку приписывается атрибут “*отношение_*” (быть отношением; в данном случае речь идет только о бинарных отношениях);
- 2) знак пары, связывающий знак одного из заданных множеств со знаком соответствующего ему атрибута, используемого в указанном выше бинарном отношении, – в этой паре используется атрибут “*атрибут_*” (быть атрибутом), а второй атрибут задается по умолчанию;
- 3) знак аналогичной пары, связывающей знак второго из заданных множеств со знаком соответствующего ему атрибута.

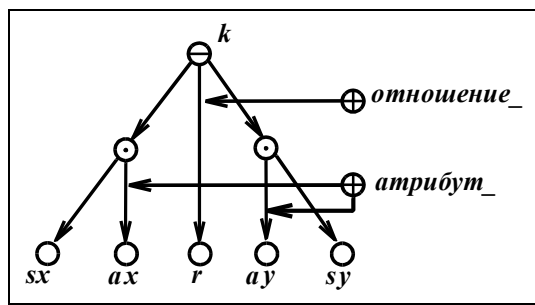
Множество знаков всевозможных конкретных соответствий есть не что иное, как одно из метаотношений, заданных на множестве всевозможных бинарных отношений (множество всевозможных бинарных отношений входит в область определения указанного метаотношения). Рассматриваемому метаотношению присвоим имя “*соответствие*” (быть соответствием).

Определение 3.3.9.1. Кортеж k задает **соответствие** между множеством x и множеством y , т.е. имеет место scb-конструкция:



в том и только в том случае, если:

- 1) имеет место конструкция вида:

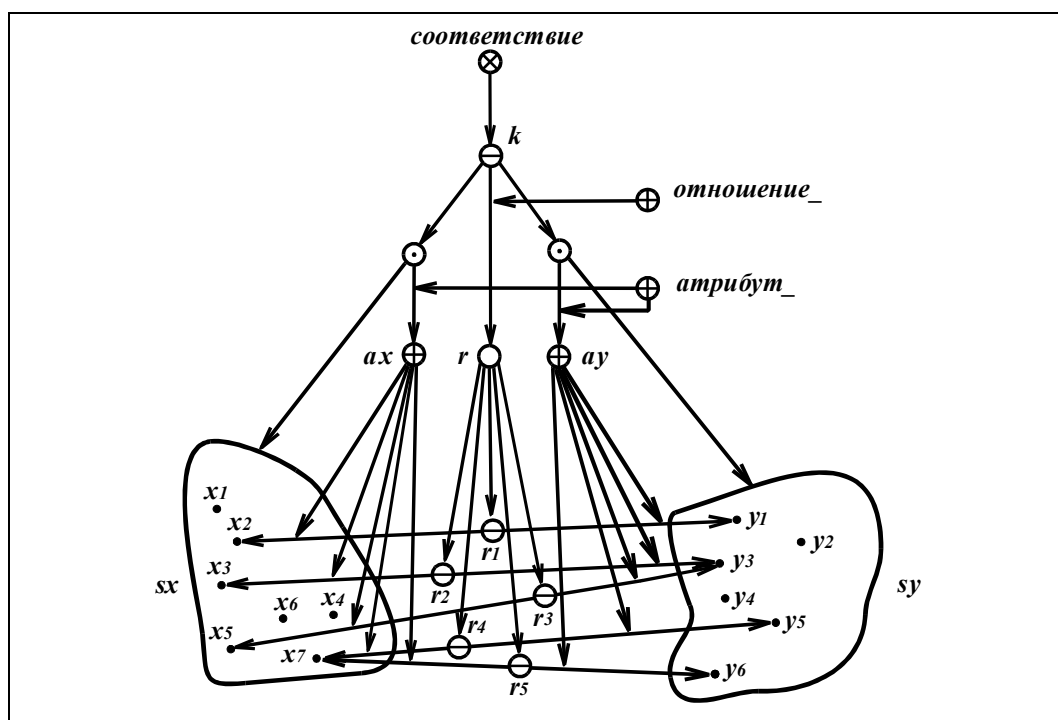


- 2) r – бинарное ориентированное отношение с атрибутами ax и ay ;
 k – знак конкретного соответствия между множествами sx и sy ;
 sx – множество прообразов;
 sy – множество образов;
 r – отношение соответствия.

- 3) $r \subseteq (sx(ax) \times sy(ay))$.

На scbg-тексте 3.3.9.1 приведён пример соответствия, взятый из [464] (Таран Т.А.1998кн-ОсновДМ).

SCBg-текст 3.3.9.1. Пример изображения кортежа отношения “соответствие”

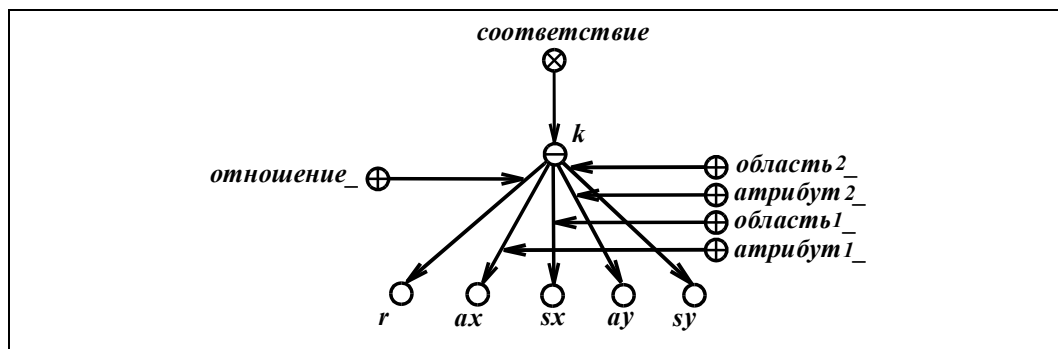


Примечание 1. В общем случае не все элементы множества sx и множества sy должны быть элементами области определения отношения r . И соответственно этому, не все элементы множества sx должны быть элементами проекции отношения r по атрибуту ax (см. $x1, x4, x6$), а также не все элементы множества sy должны быть элементами проекции отношения r по атрибуту ay (см. $y2, y4$).

Примечание 2. Одному элементу множества sx может соответствовать несколько элементов множества sy (см. элемент $x1$ и пары $r4$ и $r5$). Аналогично этому одному элементу множества sy может соответствовать несколько элементов множества sx (см. элемент $y3$ и пары $r2$ и $r3$).

Примечание 3. Множество sx и множество sy могут иметь общие элементы (в частности, одно из них может быть подмножеством другого) и даже могут совпадать.

SCBg-текст 3.3.9.2. Пример изображения кортежа отношения “соответствие” с использованием 5-мощного кортежа



Примечание. Кортеж отношения “соответствие” (“*быть соответствием*”) можно было бы сделать 5-мощным, явно включив в число его элементов знаки множеств sx и sy , а также знаки атрибутов ax и ay . Но тогда пришлось бы вводить дополнительные атрибуты для увязывания ax с sx и ay с sy , например, как на scbg-тексте 3.3.9.2. Но у построенного таким образом отношения “соответствие” для каждого кортежа k будет

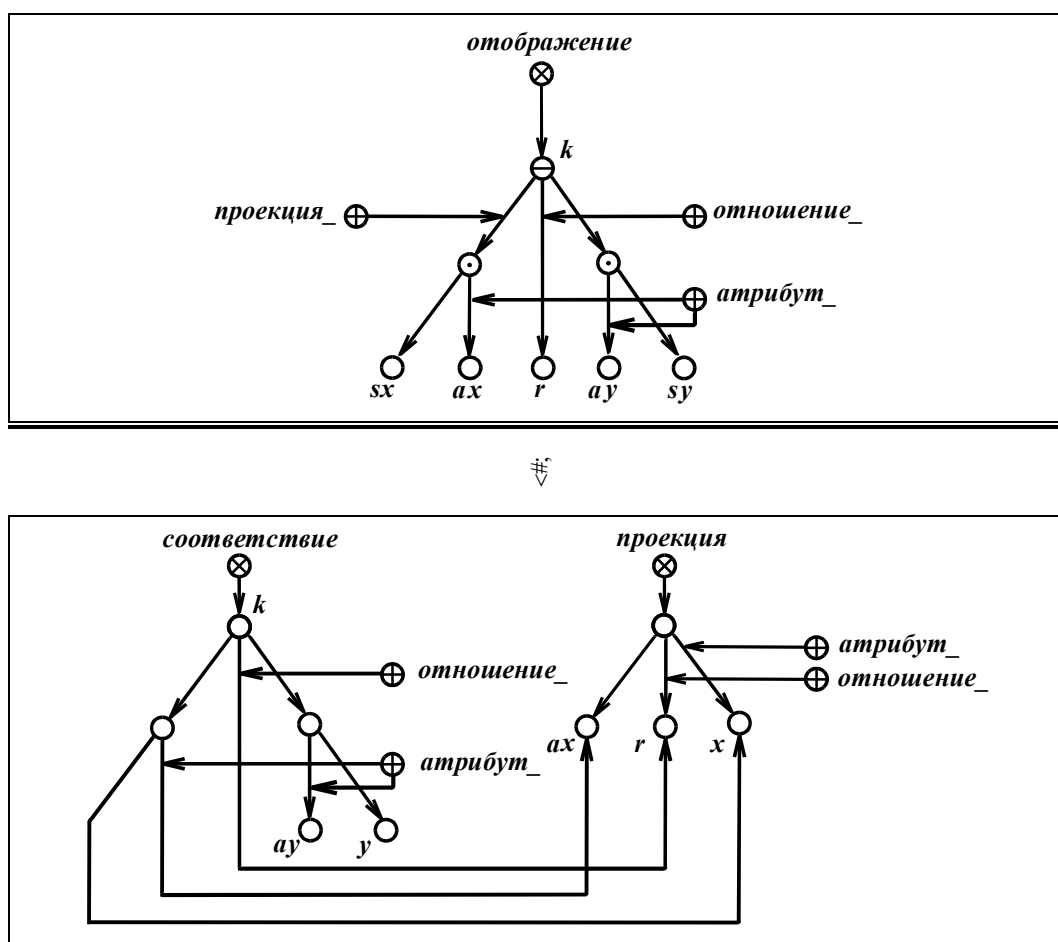
существовать встречный – компоненты кортежа с атрибутами “*атрибут₁*” и “*область₁*” могут быть заменены местами с компонентами, имеющими атрибуты “*атрибут₂*” и “*область₂*”. Это обусловлено тем, что в соответствии между множествами s_x и s_y нет асимметрии.

Типология соответствий определяется следующими факторами:

- как соотносятся между собой множества s_x и s_y (равенство, включение, строгое пересечение, т.е. наличие как общих, так и не общих элементов, непересечение);
- как соотносятся множества s_x и s_y с унарными проекциями отношения r по соответствующим атрибутам (указанные множества могут совпадать с соответствующими унарными проекциями, а могут быть их подмножествами);
- имеются ли функциональные зависимости у отношения r , и если да, то сколько (одна или две).

Определение 3.3.9.2. **Отображением** множества s_x на множество s_y будем называть такое соответствие между множеством s_x и множеством s_y , в котором множество s_x является унарной проекцией соответствующего бинарного отношения r по соответствующему атрибуту ax , а не надмножеством указанной унарной проекции (см. scbg-текст 3.3.9.3).

SCBg-текст 3.3.9.3. Запись отображения множеств на языке SCB



Примечание. Подчеркнём, что и с формальной стороны каждое конкретное отображение k является соответствием, т.е. метаотношение “*отображение*” (“*быть отображением*”) является подмножеством (частным случаем) метаотношения “*соответствие*” (“*быть соответствием*”). Правда, в кортежах метаотношения “*отображение*” используется дополнительный атрибут “*проекция_*” (“*быть проекцией*”), указывающий на область прообразов отображения.

Определение 3.3.9.3. **Сюръекцией** множества s_x и множества s_y будем называть такое соответствие между множеством s_x и множеством s_y , которое является одновременно отображением множества s_x на множество s_y , а также отображением множества s_y на множество s_x .

Определение 3.3.9.4. Однозначным соответствием (функциональным соответствием) из множества sx (с атрибутом ax) во множество sy (с атрибутом ay) будем называть такое соответствие между множеством sx (с атрибутом ax) и множеством sy (с атрибутом ay), у которого входящее в его состав бинарное ориентированное отношение r имеет ключ, каковым является атрибут ax . Это значит, что компонент с атрибутом ax в кортеже, принадлежащем отношению r , однозначно определяет этот кортеж и, следовательно, однозначно определяет компонент с атрибутом ay в указанном кортеже. Иными словами, каждому xi из множества sx соответствует не более одного yj из множества sy .

Определение 3.3.9.5. Взаимно однозначным соответствием множества sx и множества sy будем называть такое соответствие между множествами sx и sy , которое является одновременно функциональным соответствием как от множества sx во множество sy , так и от множества sy во множество sx .

Определение 3.3.9.6. Однозначным отображением (функциональным отображением) множества sx на множество sy будем называть такое соответствие между sx и sy , которое:

- является отображением множества sx на множество sy ;
- является однозначным соответствием из множества sx на множество sy .

Определение 3.3.9.7. Инъекцией множества x во множество y будем называть такое соответствие между x и y , которое:

- является отображением множества x на множество y ;
- является однозначным соответствием из множества y во множество x .

Определение 3.3.9.8. Однозначной сюръекцией (функциональной сюръекцией) из множества sx во множество sy будем называть такое соответствие между sx и sy , которое:

- является отображением sx на sy ;
- является отображением sy на sx ;
- является однозначным соответствием из sx в sy .

Примечание. Если соответствие является функциональной сюръекцией из sx в sy , то оно является сюръекцией и инъекцией множества sy (!) во множество sx (!).

Примечание. Функциональную сюръекцию из множества sx во множество sy называют также **биекцией** множества sy (!) во множество sx (!).

Определение 3.3.9.9. Взаимно однозначное отображение sx в sy – это:

- взаимно однозначное соответствие sx и sy ;
- отображение sx на sy .

Определение 3.3.9.10. Взаимно однозначная сюръекция – это:

- взаимно однозначное соответствие sx и sy ;
- сюръекция sx и sy .

Для каждого из вышеперечисленных классов соответствий в языке SCB вводятся ключевые узлы: “сюръекция”, “функциональное соответствие”, “взаимно функциональное соответствие”, “функциональное отображение” и т.д.

3.3.10. Типология тернарных отношений и метаотношения над ними

Ключевые понятия: тернарное отношение; коммутативное классическое тернарное отношение; ассоциативное тернарное отношение; тернарное отношение с одной функцией; тернарное отношение с двумя функциями; тернарное отношение с тремя функциями; коммутативное отношение; некоммутативное отношение; ассоциативное отношение; неассоциативное отношение; дистрибутивность.

Определение 3.3.10.1. Коммутативное классическое тернарное отношение – это отношение, у которого для каждого кортежа вида $\square x, y, z \square$ имеется кортеж вида $\square y, x, z \square$.

Примером коммутативного классического тернарного отношения является классический вариант отношения сложения (см. “*сложение-1*” в пункте 3.3.3). Общее определение коммутативного отношения (необязательно тернарного и необязательно классического) также приведено в пункте 3.3.3.

Определение 3.3.10.2. Ассоциативное тернарное отношение – это отношение, у которого для каждой пары кортежей вида:

$\square a1 : x, a2 : y, a3 : xy \square, \square a1 : xy, a2 : z, a3 : xyz \square$
имеются кортежи вида:

$\square a1 : y, a2 : z, a3 : yz \square, \square a1 : x, a2 : yz, a3 : yz \square$.

К числу метаотношений, заданных на множестве тернарных отношений, относится метаотношение “*дистрибутивность*” (см. пункт 3.3.13).

Упражнения к пункту 3.3.10.

Упражнение 3.3.10.1. Являются ли функции, соответствующие тернарным отношениям, операциями?

Упражнение 3.3.10.2. Может ли ассоциативное отношение быть некоммутативным?

Упражнение 3.3.10.3. Может ли коммутативное отношение быть неассоциативным?

3.3.11. Отношения над множествами

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *включение множества, строгое включение множества, равенство множеств, эквивалентность множеств по совпадению элементов, пара пересекающихся множеств, объединение множеств, соединение множеств, разбиение множества, пересечение множеств, разность множеств, симметрическая разность множеств.*

Каждое отношение, принадлежащее к классу отношений над множествами, характерно тем, что в его область определения входят знаки всевозможных множеств.

В подразделе 3.1 были рассмотрены основные соотношения между множествами, а также было рассмотрено описание этих соотношений в языке SCBs. Сейчас мы рассмотрим трактовку этих соотношений в графическом реляционном языке SCBg. Для этого необходимо всем основным теоретико-множественным соотношениям поставить в соответствие определенные отношения над множествами.

К числу бинарных отношений над множествами принадлежат отношения, которым поставим в соответствие следующие идентификаторы (здесь используется синтаксис языка SCBs):

- **включение множества**
 - = *быть включением одного множества /* подмножества */ в другое /* надмножество */*
 - = *Множество всевозможных ориентированных пар, каждая из которых связывает некоторое множество с его подмножеством*
 - = *теоретико-множественное включение;*

- **строгое включение множества**
 - = *быть строгим включением одного множества /* собственного подмножества */ в другое /* надмножество */*
 - = *Множество всевозможных ориентированных пар, каждая из которых связывает некоторое множество с его собственным подмножеством*
 - = *теоретико-множественное строгое включение;*
- **равенство множеств**
 - = *быть равными множествами*
 - = *Множество всевозможных неориентированных пар, каждая из которых связывает равные друг другу множества*
 - = *теоретико-множественное равенство;*
- **эквивалентность множеств по совпадению элементов**
 - = *множества с одинаковыми элементами*
 - = *быть парой множеств, имеющих одинаковые элементы*
 - = *Множество всевозможных неориентированных пар, каждая из которых связывает множества с одинаковыми элементами;*
- **пара пересекающихся множеств**
 - = *быть парой пересекающихся множеств*
 - = *Множество всевозможных неориентированных пар, каждая из которых связывает два пересекающихся множества;*

Нельзя также забывать, что к числу бинарных отношений над множествами относятся следующие базовые для языка SCB отношения:

- **Отношение принадлежности**
 - = *Множество всевозможных знаков пар принадлежности*
 - = *пара принадлежности*
 - = *Принадлежность;*
- **Отношение непринадлежности**
 - = *Множество всевозможных знаков пар не являющихся парами принадлежности*
 - = *Множество всевозможных знаков пар непринадлежности*
 - = *пара непринадлежности;*

В языке SCB знак пары принадлежности называется scb-дугой и изображается (в языке SCBg) линией со стрелкой. В языке SCB знак пары непринадлежности будем называть **негативной scb-дугой** и изображать (в языке SCBg) перечеркнутой линией со стрелкой. Следует особо подчеркнуть то, что отношение непринадлежности является удобным средством представления (изображения) множеств, каждое из которых состоит из каких угодно элементов, кроме "неэлементов" некоторого заданного множества. Множество указанного вида будем называть отрицанием заданного множества, дополнением заданного множества до некоторого условного универсального множества или негативным множеством по отношению к заданному множеству. Итак, принадлежность некоторого элемента x множеству, которое является отрицанием (универсальным дополнением) множества s , изображается в языке SCB путем проведения пары непринадлежности из s в x . Таким способом, в частности, представляются и "отрицательные" отношения:

- невключение множества;
- не *быть строгим включением множества /* не путать с нестрогим включением */;*
- неравенство множеств;
- не *быть множествами с одинаковыми элементами;*
- пара непересекающихся множеств.

К числу тернарных отношений над множествами принадлежат отношения, которым поставим в соответствии следующие идентификаторы:

- **объединение множеств**
 - = *объединение*

- = *множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два множества с результатом их объединения*
- = *теоретико-множественное объединение;*
- *соединение множеств*
 - = *множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два множества с результатом их соединения;*
- *разбиение множества*
 - = *разбиение*
 - = *множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два непересекающихся множества с результатом их объединения;*
- *пересечение множеств*
 - = *множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два множества с результатом их пересечения*
 - = *теоретико-множественное пересечение;*
- *разность множеств*
 - = *множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два множества $\setminus$ уменьшаемое и вычитаемое $\setminus$ с их разностью*
 - = *теоретико-множественная разность;*
- *симметрическая разность множеств*
 - = *множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два множества с их симметрической разностью*
 - = *теоретико-множественная симметрическая разность.*

Подчеркнем, что некоторые из перечисленных отношений целесообразно обобщить, разрешив использование связок произвольной мощности. Так, например,

- отношение “*равенство множеств*” будем трактовать как множество неориентированных связок, каждая из которых представляет собой семейство из произвольного числа равных друг другу множеств;
- отношение “*множество с одинаковыми элементами*” будем трактовать как множество неориентированных связок, каждая из которых представляет собой семейство из произвольного числа множеств, имеющих по крайней мере один общий для них всех элемент;
- отношение “*объединение множеств*” будем трактовать как множество ориентированных связок, каждая из которых связывает некоторый набор из произвольного числа множеств с результатом их объединения;
- отношение “*соединение множеств*” будем трактовать как множество ориентированных связок, каждая из которых связывает некоторый набор из произвольного числа множеств с результатом их соединения;
- отношение “*разбиение множества*” будем трактовать как множество ориентированных связок, каждая из которых связывает некоторый набор из произвольного числа попарно непересекающихся множеств с результатом их объединения;
- отношение “*пересечение множеств*” будем трактовать как множество ориентированных связок, каждая из которых связывает некоторый набор из произвольного числа множеств с результатом их пересечения.

Кроме этого введем ещё одно отношение со связками различной мощности:

- отношение “*попарно непересекающиеся множества*”, которое будем трактовать как множество неориентированных связок, каждая из которых представляет собой семейство из произвольного числа попарно непересекающихся множеств. Заметим, что 2-мощный вариант связок рассматриваемого отношения является вырожденным и может быть выражен с помощью отношения не принадлежности, т.е. путем отрицания принадлежности этой связки к отношению “*пересекающиеся множества*”.

Ниже приводятся определения перечисленных отношений с использованием средств языка SCB, а также примеры использования этих отношений для записи соответствующих соотношений между множествами.

Определение 3.3.11.1. Определение отношения “*включение множества*”. Будем говорить, что $k \leq!$ *включение множества*; в том и только в том случае, если:

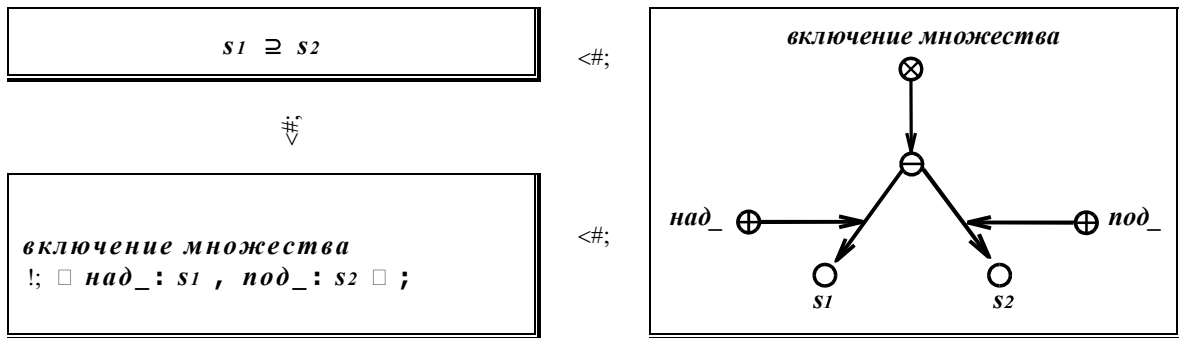
- $k = \square \text{ над_} : s1, \text{ под_} : s2 \square$; , т.е. k – 2-мощный кортеж с атрибутом “*над_*” (быть надмножеством) и атрибутом “*под_*” (быть подмножеством);
- для каждой конструкции вида $s2 !; x$; существует конструкция вида $s1 !; x$; , т.е. каждый элемент множества $s2$ является и элементом множества $s1$. Точнее, каждому вхождению какого-либо элемента во множество $s2$ соответствует вхождение этого же элемента во множество $s1$.
- для каждого x количество конструкций вида $s2 !; x$; не превышает количества конструкций вида $s1 !; x$; . То есть каждый элемент множества $s1$ либо вообще не входит в число элементов множества $s2$, либо входит с меньшей кратностью, либо входит с равной кратностью (но не с большей кратностью).

В рамках кортежа, принадлежащего отношению “*включение множества*”, компонент с атрибутом “*над_*” будем называть надмножеством, а компонент с атрибутом “*под_*” – подмножеством.

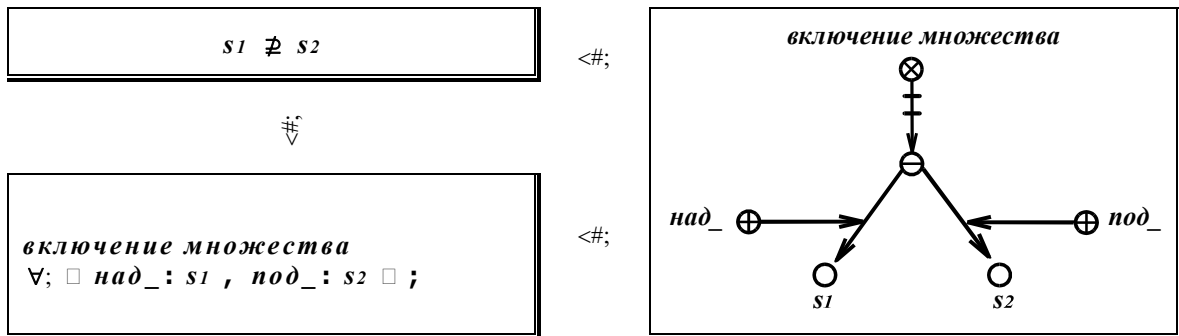
Отношение “*включение множества*” является: бинарным, ориентированным, классическим, без функций, рефлексивным, антисимметричным, транзитивным.

На scb-текстах 3.3.11.1 и 3.3.11.2 приведены примеры использования отношения “*включение множества*” для изображения соотношений включения и невключения множества, приведенных в таблице 3.1.1.

SCB-текст 3.3.11.1. Варианты изображения соотношения нестрогого включения множества $s2$ во множество $s1$



SCB-текст 3.3.11.2. Варианты изображения соотношения нестрогого невключения множества $s2$ во множество $s1$



Определение 3.3.11.2. Определение отношения “*строгое включение множества*”. Будем говорить, что $k \leq!$ *строгое включение множества*; в том и только в том случае, если:

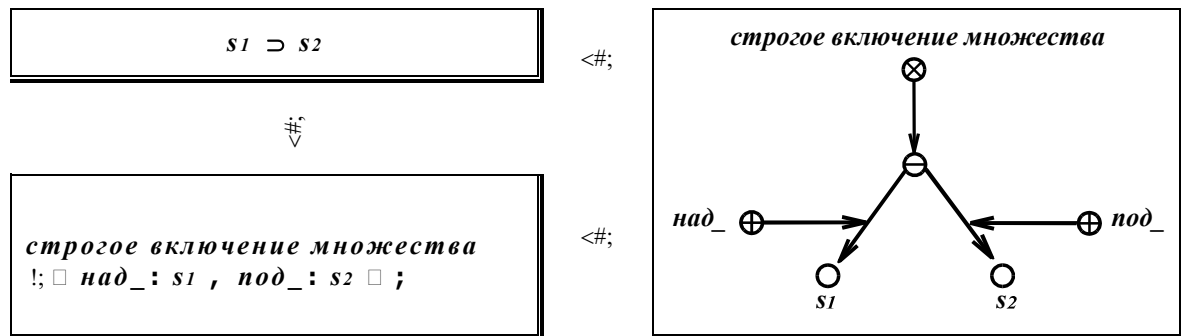
- $k = \square \text{ над_} : s1, \text{ под_} : s2 \square$;
- $k \leq!$ *включение множества* ;
- существует по крайней мере один элемент x , для которого справедливо следующее:
 - $s1 !; x$;

• имеет место следующая дизъюнкция:

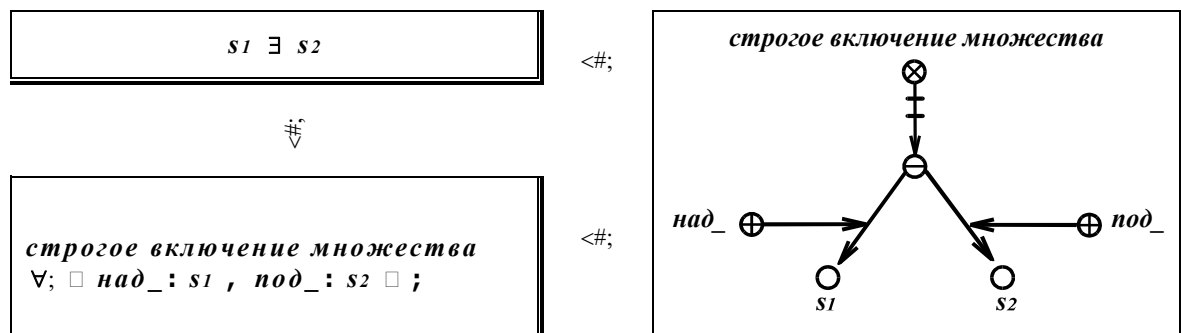
- либо не существует конструкций вида $s_2 \vdash x$;
- либо количество конструкций вида $s_1 \vdash x$; больше, чем количество конструкций вида $s_2 \vdash x$; (т.е. число позитивных scb-дуг, проведенных из s_1 в x , больше числа позитивных scb-дуг, проведенных из s_2 в x).

На scb-текстах 3.3.11.3 и 3.3.11.4 приведены примеры использования отношения “*строгое включение множества*” для изображения соотношений строгого включения и не включения множества, приведенных в табл. 3.1.1.

SCB-текст 3.3.11.3. Варианты изображения соотношения строгого включения множества s_2 во множество s_1



SCB-текст 3.3.11.4. Варианты изображения соотношения строгого не включения множества s_2 во множество s_1



Определение 3.3.11.3. Определение метаотношения “*семейство вложенных множеств*”. Будем говорить, что $k \prec!$ *семейство вложенных множеств* ; в том и только в том случае, если:

- множество k имеет по крайней мере два элемента;
- для каждой конструкции вида $k \vdash x_1, x_2$; имеет место
 - либо конструкция вида *включение множества* $\vdash; \square \text{ над_} : x_1, \text{ под_} : x_2 \square ;$
 - либо конструкция вида *включение множества* $\vdash; \square \text{ над_} : x_2, \text{ под_} : x_1 \square ;$

Таким образом, отношение “*семейство вложенных множеств*” представляет собой неориентированное отношение со связками разной мощности.

Определение 3.3.11.4. Минимальным в семействе вложенных множеств будем называть такое множество, которое включено во все остальные множества указанного семейства.

Определение 3.3.11.5. Определение отношения “*равенство множеств*”.

Будем говорить, что $k \prec!$ *равенство множеств* ; в том и только в том случае, если:

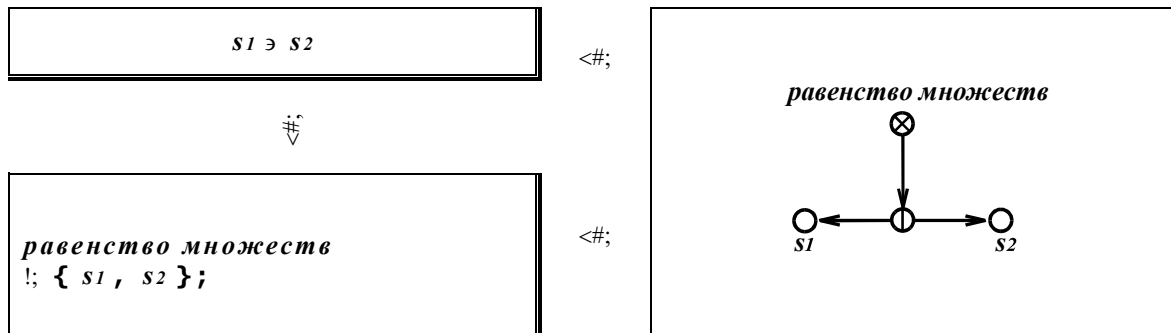
- $k = \{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$;
- для каждой пары множеств $\{ s_i, s_j \}$ из семейства множеств $\{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$ имеет место следующее:

- $\square \text{над_} : si, \text{под_} : sj \square \leq !$ включение множества ;
- $\square \text{над_} : sj, \text{под_} : si \square \leq !$ включение множества ;

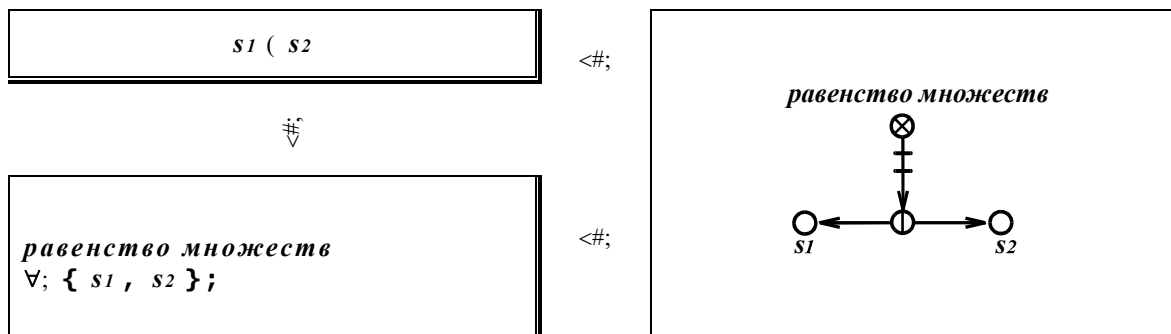
Иначе говоря, равные множества – это множества, состоящие из одинаковых элементов, каждый из которых имеет одинаковое количество вхождений во все указанные множества.

На scb-текстах 3.3.11.5 и 3.3.11.6 приведены примеры использования отношения “*равенство множеств*” для изображения соотношений равенства и неравенства множеств, приведенных в табл. 3.1.1.

SCB-текст 3.3.11.5. Варианты изображения равенства множеств s_2 и s_1



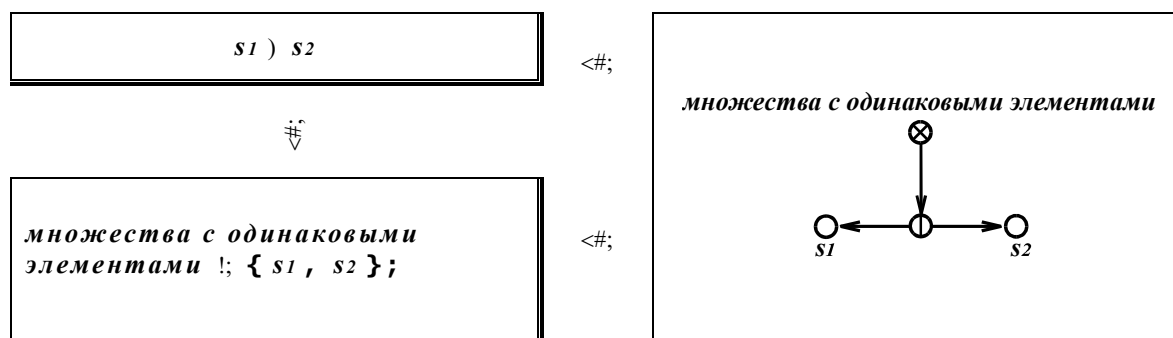
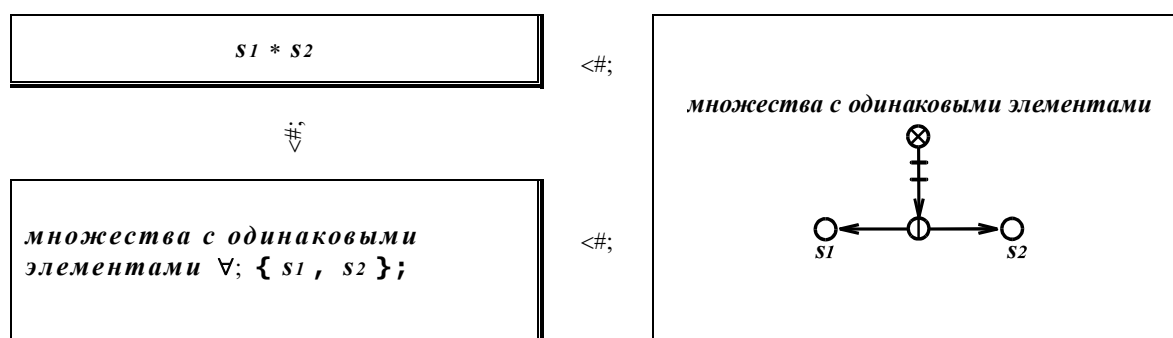
SCB-текст 3.3.11.6. Варианты изображения неравенства множеств s_2 и s_1



Определение 3.3.11.6. Определение отношения “*множества с одинаковыми элементами*”. Будем говорить, что $k \leq !$ *множества с одинаковыми элементами* ; в том и только в том случае, если:

- $k = \{ s_1, s_2, \dots, s_n \};$
- для каждой пары множеств $\{ si, sj \}$ из семейства множеств $\{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$ имеет место следующее:
 - для каждой конструкции вида $si !; x;$ существует конструкция вида $sj !; x;$; т.е. каждый элемент множества si является также и элементом множества sj (при этом кратность вхождения этого элемента в si и в sj не учитывается) ;
 - для каждой конструкции вида $sj !; x;$ существует конструкция вида $si !; x;$.

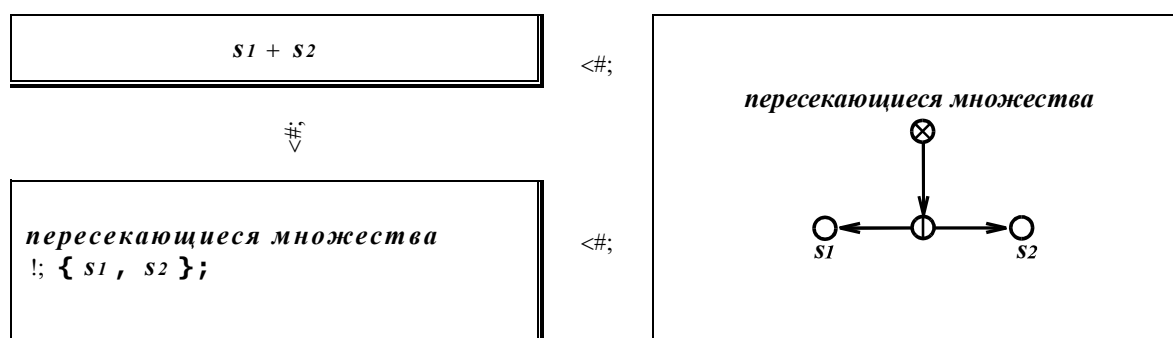
На scb-текстах 3.3.11.7 и 3.3.11.8 приведены примеры использования отношения “*множества с одинаковыми элементами*” для изображения соответствующих соотношений, приведенных в таблице 3.1.1.

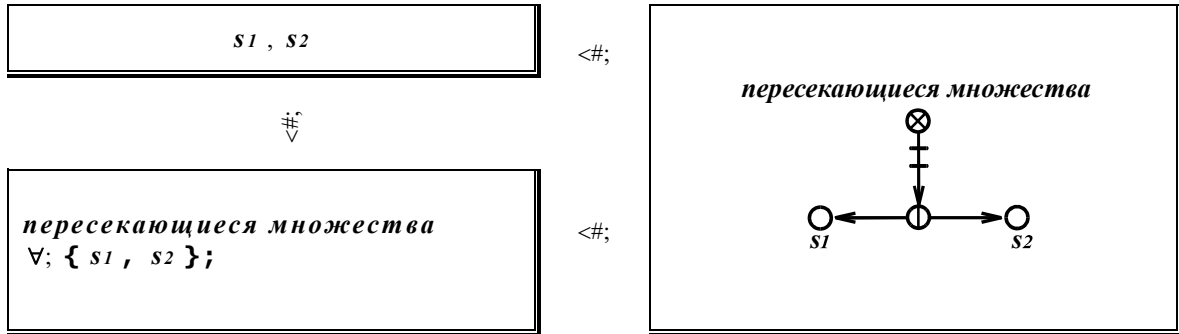
SCB-текст 3.3.11.7. Варианты изображения множеств с одинаковыми элементами

SCB-текст 3.3.11.8. Варианты изображения множеств с неодинаковыми элементами

Определение 3.3.11.7. Определение отношения “*пересекающиеся множества*”.

Будем говорить, что k *пересекающиеся множества*; в том и только в том случае, если:

- $k = \{s_1, s_2, \dots, s_n\};$
- существует x такой, что для каждого множества s_i из семейства $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ имеет место конструкция $s_i !; x$;

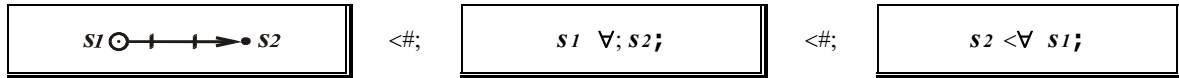
На scb-текстах 3.3.11.9 и 3.3.11.10 приведены примеры использования отношения “*пересекающиеся множества*” для изображения соответствующих соотношений, приведенных в табл. 3.1.1.

SCB-текст 3.3.11.9. Варианты изображения пересекающихся множеств


SCB-текст 3.3.11.10. Варианты изображения непересекающихся множеств

Определение 3.3.11.8. Определение отношения “*Отношение непринадлежности*”. Синонимичными идентификаторами этого отношения являются также “*пара непринадлежности*”, “*быть парой непринадлежности*” (см. подраздел 2.6). Будем говорить, что знак ориентированной (упорядоченной) пары $\square s_1, s_2 \square$ является элементом отношения непринадлежности в том и только в том случае, если не существует ни одной пары принадлежности вида $s_1 !; s_2$.

Пары отношения непринадлежности называются парами непринадлежности и изображаются scbg-конструкциями и scbs-конструкциями следующего вида:



См. также подразделы 2.3, 2.4, 2.5.

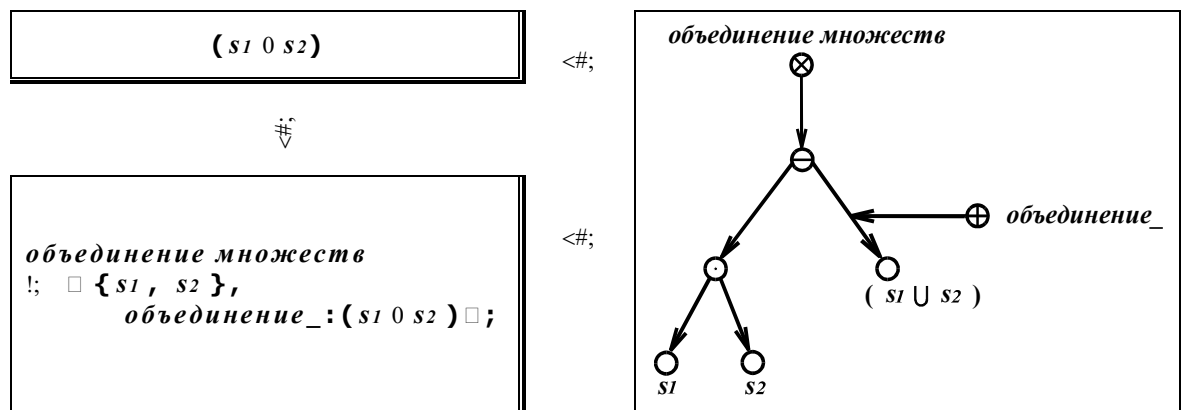
Определение 3.3.11.9. Определение отношения “*объединение множеств*”. Будем говорить, что $k < !$ *объединение множеств* ; в том и только в том случае, если:

- $k = \square \{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \text{объединение_} : sm \square ;$
- для каждой конструкции вида $s_i !; e ;$ (где s_i есть элемент множества k , не отмеченный атрибутом “*объединение_*”) существует конструкция $sm !; e ;$
- для каждой конструкции вида $sm !; e ;$ существует по крайней мере одно множество s_i из семейства $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ такое, что $s_i !; e ;$
- для каждой конструкции вида $sm !; e ;$ имеет место следующее:

пусть x_1 есть кратность вхождения элемента e во множество s_1 (т.е. количество вхождений e в s_1), x_2 – количество вхождений e в s_2 и т.д., x_n – количество вхождений e в s_n и пусть x_{max} – максимальное из этих чисел,
тогда количество вхождений указанного элемента e во множество sm равняется x_{max} .

Примечание. Если элемент e не входит в число элементов множества s_i , то количество вхождений этого элемента в указанное множество считается равным нулю.

На scb-тексте 3.3.11.11 приведены примеры использования отношения “*объединение множеств*” для изображения соответствующего соотношения, приведенного в таблице 3.1.1.

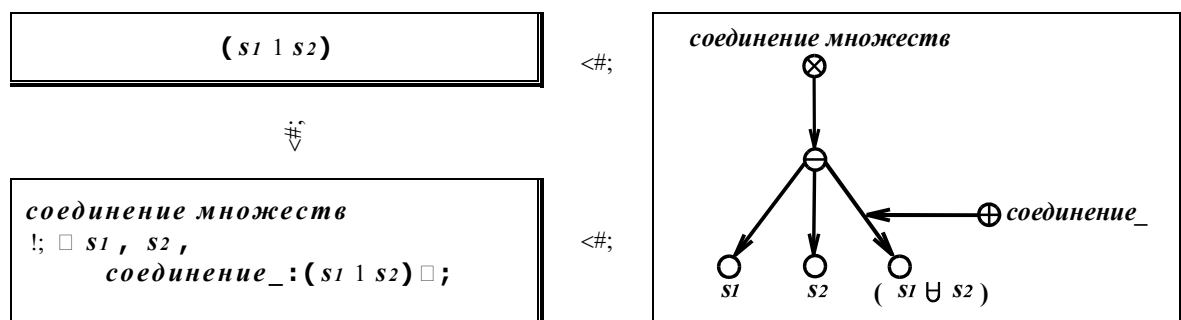
SCB-текст 3.3.11.11. Варианты изображения отношения объединения множеств

Определение 3.3.11.10. Определение отношения “соединение множеств”.

Будем говорить, что $k < ! \text{соединение множеств}$; в том и только в том случае, если:

- $k = \square s1, s2, \dots, sn, \text{соединение_} : sm \square;$
- для каждой конструкции вида $si \text{ !}; e;$ (где si есть множество из семейства $\{s1, s2, \dots, sn\}$) существует конструкция $sm \text{ !}; e;$
- для каждой конструкции вида $sm \text{ !}; e;$ существует множество si из семейства $\{s1, s2, \dots, sn\}$ такое, что $si \text{ !}; e;$
- для каждого элемента e имеет место следующее:
пусть $x1$ – количество вхождений e в $s1$, $x2$ – количество вхождений e в $s2$ и т.д. xen – количество вхождений e в sn ,

тогда количество вхождений e в sm равно $\sum_{i=1}^n xi$.

На scb-тексте 3.3.11.12 приведены примеры использования отношения “соединение множеств” для изображения соответствующего соотношения, приведенного в табл. 3.1.1.

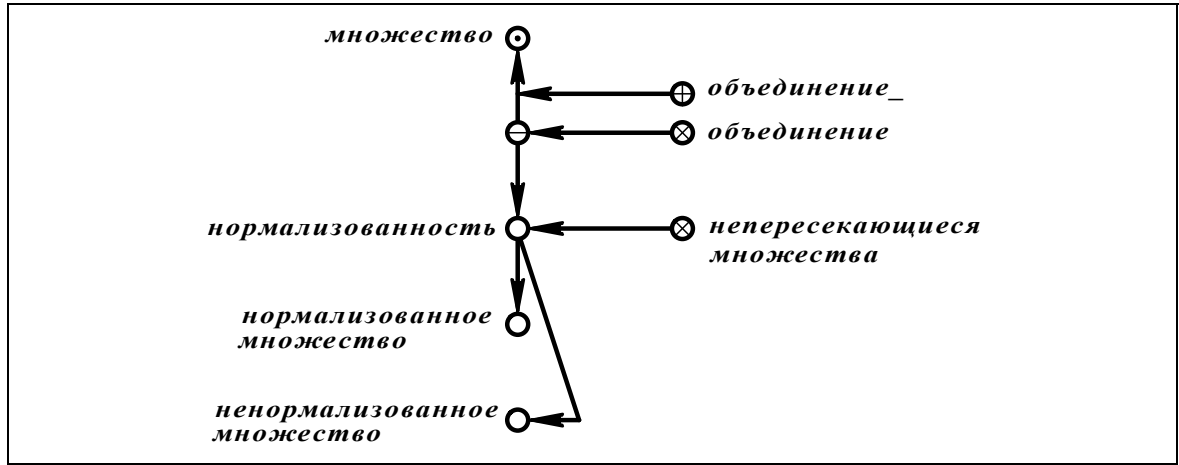
SCB-текст 3.3.11.12. Варианты изображения отношения соединения множеств

Определение 3.3.11.11. Определение отношения “разбиение множеств”.

Будем говорить, что $k < ! \text{разбиение множеств}$; в том и только в том случае, если:

- $k = \square \{s1, s2, \dots, sn\}, \text{объединение_} : sm \square; k < ! \text{объединение множеств};$
- для каждой пары множеств $\{si, sj\}$ из семейства $\{s1, s2, \dots, sn\}$ не существует e такого, что $si \text{ !}; e; sj \text{ !}; e;$, т.е. не существует общих элементов у множеств si и sj .

Отношение разбиения играет очень важную роль при представлении знаний – с его помощью осуществляется классификация самых различных понятий. При представлении отношения разбиения можно явно не вводить знак этого отношения, а пользоваться знаком отношения объединения и знаком отношения “*непересекающиеся множества*” (см. scb-текст 3.3.11.13).

SCB-текст 3.3.11.13. Формальная запись на языке SCB типологии множеств, которая приведена в таблице 2.1.1

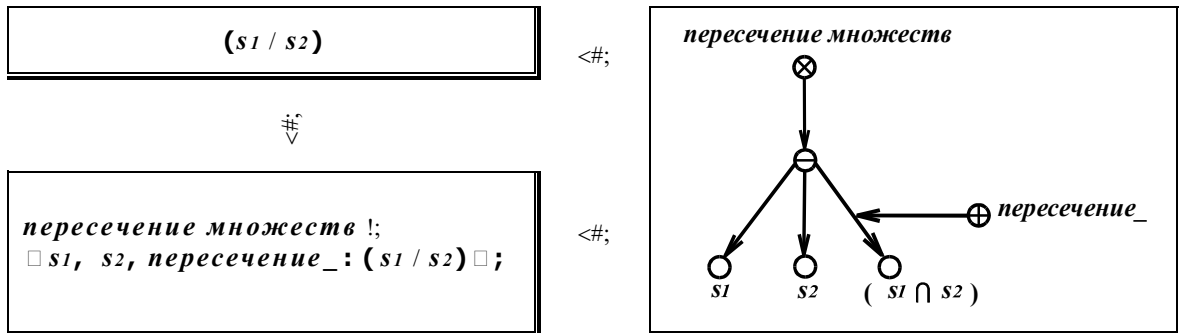


Определение 3.3.11.12. Определение отношения “пересечение множеств”. Будем говорить, что $k < \#$ пересечение множеств; в том и только в том случае, если:

- $k = \square s_1, s_2, \dots, s_n, \text{пересечение_}; sm \square$;
- для каждой конструкции вида $s_1, s_2, \dots, s_n !; e$; существует конструкция вида $sm !; e$;
- и наоборот: из $sm !; e$; следует $s_1, s_2, \dots, s_n !; sm$;
- для каждого e , являющегося элементом множества sm , имеет место следующее:
пусть x_1 – количество вхождений e в s_1 , x_2 – количество вхождений e в s_2 и т.д., x_n – количество вхождений e в s_n , x_{min} – минимальное из перечисленных чисел, тогда количество вхождений e в sm равно x_{min} .

На scb-тексте 3.3.11.14 приведены примеры использования отношения “пересечение множеств” для изображения соответствующего соотношения, приведенного в табл. 3.1.1.

SCB-текст 3.3.11.14. Варианты изображения отношения пересечения множеств



Определение 3.3.11.13. Определение отношения “разность множеств”.

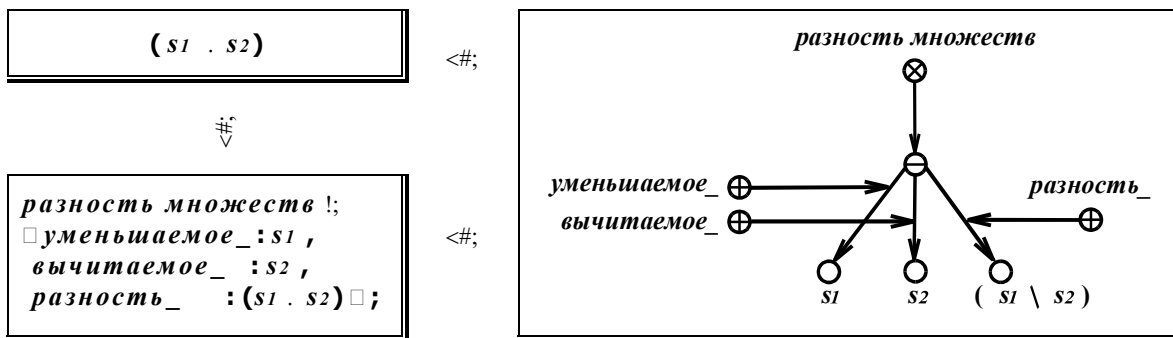
Будем говорить, что $k < \#$ разность множеств; в том и только в том случае, если:

- $k = \square \text{уменьшаемое_}; s_1, \text{вычитаемое_}; s_2, \text{разность_}; s_3 \square$;
- для каждой конструкции вида $s_1 !; e$; $s_2 \forall; e$; существует одна и только одна конструкция вида $s_3 !; e$; т.е. каждый элемент множества s_1 , не являющийся элементом множества s_2 , входит в число элементов множества s_3 , причем указанный элемент входит в s_1 и в s_3 с одинаковой кратностью;
- каждый элемент e , который входит в s_1 с кратностью x_1 , а в s_2 – с кратностью x_2 и при этом $x_2 \geq x_1$, не входит во множество s_3 ;
- каждый элемент e , который входит в s_1 с кратностью x_1 , а в s_2 – с кратностью x_2 и при этом $x_2 < x_1$, входит во множество s_3 с кратностью $(x_1 - x_2)$;

- каждый элемент e , входящий в s_3 с кратностью x_3 , входит во множество s_1 с кратностью $(x_3 + x_2)$, где x_2 – кратность вхождения этого элемента во множество s_2 . Напомним при этом, что кратность, равная нулю, означает отсутствие вхождения элемента во множество.

На scb-тексте 3.3.11.15 приведены примеры использования отношения “разность множеств” для изображения соответствующего соотношения, приведенного в табл. 3.1.1.

SCB-текст 3.3.11.15. Варианты изображения отношения разности множеств

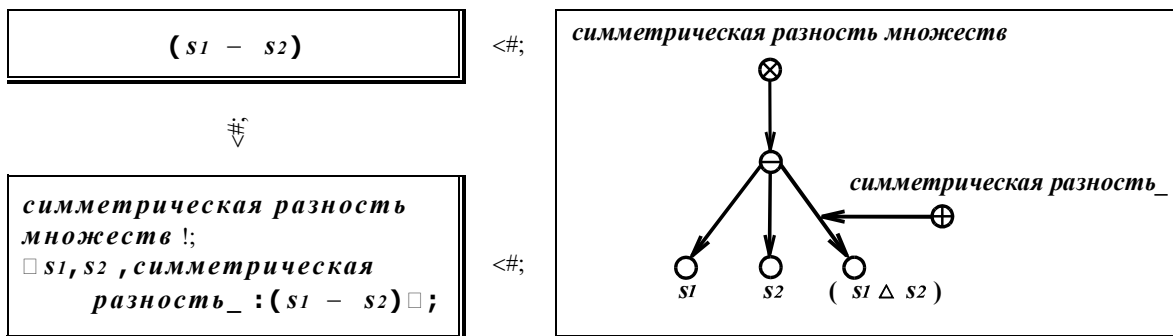


Определение 3.3.11.14. Определение отношения “симметрическая разность множеств”. Будем говорить, что $k \leq$ *симметрическая разность множеств* ; в том и только в том случае, если существует конструкция вида:

$k =$ □ $s_1, s_2, \text{разность_} : s_3$ □ ;
 □ { s_1, s_2 }, *объединение_* : sy □ <! *объединение множеств* ;
 □ s_1, s_2 , *пересечение_* : sp □ <! *пересечение множеств* ;
 □ *уменьшаемое_* : sy , *вычитаемое_* : sp , *разность_* : s_3 □ <! *разность множеств* ; .

На scb-тексте 3.3.11.16 приведены примеры использования отношения “симметрическая разность множеств” для изображения соответствующего соотношения, приведенного в табл. 3.1.1.

SCB-текст 3.3.11.16. Варианты изображения отношения симметрической разности множеств



Определение 3.3.11.15. Определение отношения “семейство попарно непересекающихся множеств”. Будем говорить, что $k \leq$ *семейство попарно непересекающихся множеств* ; в том и только в том случае, если:

- $k = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$;
- для каждой пары множеств $\{s_i, s_j\}$ из семейства множеств $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ не существует e такого, что $s_i \neq e$; $s_j \neq e$; т.е. не существует общих элементов у множеств s_i и s_j .

Заметим при этом, что имеет место синонимия следующих идентификаторов:

<i>попарно непересекающиеся множества</i> $=$ <i>семейство попарно непересекающихся множеств</i> ;

Примечание. Следует четко отличать следующие понятия:

- отношение синонимии (множество знаков пар синонимии, множество знаков пар равенства знаков);
- отношение эквивалентности множеств по набору элементов;
- отношение равенства множеств (множество знаков пар равенства множеств);
- отношение равенства кортежей;
- отношение равномощности множеств (отношение эквивалентности множеств по мощности);
- отношение эквивалентности множеств по количеству элементов.

Завершая рассмотрение отношений над множествами, приведем некоторые теоретико-множественные соотношения между введенными нами отношениями.

включение множества $\supset$ строгое включение множества ;
строгое включение множества , равенство множеств ;
равенство множеств $\supset$ множества с одинаковыми элементами ;
разбиение множества $\subset$ объединение множеств ;
разбиение множества $\subset$ соединение множеств ;
объединение множеств + соединение множеств ; .

Примечание. Могут ли пересекаться два ориентированных отношения, которые имеют разные схемы (разные наборы атрибутов)? Да, поскольку каждое отношение, "зная" свою схему, имеет возможность учитывать только свои атрибуты, т.е. атрибуты, входящие в его схему. Поэтому связи разных отношений, являющиеся равными множествами, целесообразно "склеивать" независимо от распределения атрибутов. При этом надо внимательно следить за теми атрибутами, которые являются общими для отношений, связи которых склеиваются. Связки, являющиеся равными множествами и даже равными кортежами, целесообразно сохранять только в рамках одного отношения (кратные связи, встречные связи).

3.3.12. Отношения над кортежами

Идентификаторы ключевых scb-узлов: *включение кортежа, пересечение кортежей, равенство кортежей, встречные кортежи.*

Определение 3.3.12.1. Определение отношения "**включение кортежа**". Кортеж *ki* включает в себя кортеж *kj* (т.е. является его **подкортежем**) в том и только в том случае, если каждый элемент кортежа *kj* входит в кортеж *ki* под тем же атрибутом.

Определение 3.3.12.2. Определение отношения "**пересечение кортежей**". Кортеж *ke* является результатом **пересечения кортежей** *ki* и *kj* в том и только в том случае, если каждый элемент кортежа *ke* входит в кортеж *ki* и кортеж *kj* под тем же атрибутом.

Определение 3.3.12.3. Определение отношения "**равенство кортежей**". Будем говорить, что кортеж *ki* **равен** кортежу *kj* в том и только в том случае, если:

- указанные кортежи являются равными множествами;
- существует взаимно однозначное соответствие, которое каждому вхождению элемента в кортеж *ki* ставит в соответствие вхождение этого же элемента, но в кортеж *kj*, причём с теми же атрибутами и, наоборот, каждому вхождению элемента в кортеж *kj* ставит в соответствие вхождение этого же элемента в кортеж *ki*, причём с теми же атрибутами.

Напомним, что вхождение элемента в кортеж может вообще не иметь атрибута, может иметь один атрибут, может иметь несколько атрибутов.

Равные кортежи будем также называть **кратными кортежами**. Частным случаем равных кортежей являются кратные пары принадлежности.

Определение 3.3.12.4. Определение отношения "**встречные кортежи**". Кортежи, являющиеся равными множествами, но не являющиеся равными кортежами, будем называть **встречными** кортежами.

3.3.13. Отношения над отношениями

Ключевые понятия и идентификаторы ключевых scb-узлов: *метаотношений, схема отношения, отношение_, атрибут по умолчанию, область определения, домен, проекция отношения, функциональная зависимость, ключевая функциональная зависимость.*

Определение 3.3.13.1. Будем считать, что отношение r относится к классу отношений над отношениями (к классу **метаотношений**) в том и только в том случае, если:

- в область определения отношения r входят либо знаки всевозможных отношений, либо знаки всех отношений некоторого класса;
- в состав каждой связки отношения r входит знак некоторого отношения.

Анализ области определения метаотношений позволяет выделить следующие классы таких отношений:

- отношения над всевозможными отношениями;
- отношения над классическими отношениями;
- отношения над ориентированными отношениями;
- отношения над неориентированными отношениями;
- отношения над бинарными ориентированными отношениями;
- отношения над бинарными неориентированными отношениями
- и т.д.

Выше при рассмотрении типологии отношений мы ввели целый ряд понятий, формальное уточнение которых требует введения метаотношений, соответствующих этим понятиям. К числу указанных понятий относятся такие понятия, как **схема отношения** (см. пункт 3.3.3), **проекция отношения** (см. пункт 3.3.4), **домен**, **функциональная зависимость**, **ключевая функциональная зависимость**, **функция**, **алгебраическая операция** (см. пункт 3.3.5). Каждому из перечисленных понятий поставим в соответствие метаотношение, которое в языке SCB будет обозначаться определенным scb-узлом. Таким образом будут введены scb-узлы со следующими идентификаторами:

- **"схема отношения"** ;
- **"область определения"** ;
- **"домен"** ;
- **"проекция отношения"** ;
- **"функциональная зависимость"** ;
- **"ключевая функциональная зависимость"** ;
- **"функция"** ;
- **"алгебраическая операция"** .

Перейдем к более строгому определению этих понятий, приближая тексты самих определений к их записи на формальном логическом языке, который будет построен на основе языка SCB и подробно рассмотрен в разделе 5.

Определение 3.3.13.2. Определение метаотношения **"схема отношения"**, являющегося уточнением понятия схемы отношения (см. пункт 3.3.3). Будем говорить, что множество k принадлежит метаотношению **"схема отношения"**, т.е. имеет место конструкция $k \leq \text{схема отношения}$; в том и только в том случае, если:

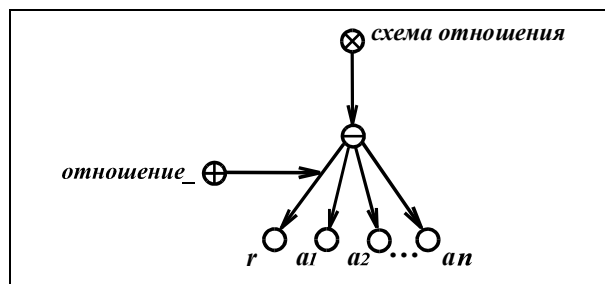
- множество k является кортежем;
- существует конструкция вида: $k \text{ !}; \text{отношение_} : ri$; где ri — знак множества, трактуемого в рамках кортежа как некое рассматриваемое ориентированное отношение, отношение_ — знак атрибута, указывающего на рассматриваемое отношение (в данном случае на отношение ri);
- все остальные элементы кортежа k отмечаются атрибутом, задаваемым по умолчанию, и трактуются как знаки атрибутов, используемых в кортежах ориентированного отношения ri , — указанные знаки атрибутов будем называть элементами схемы отношения ri ;

- в кортеже k перечислены все элементы схемы отношения ri , т.е. все атрибуты, используемые в этом отношении. При этом если в отношении ri используется атрибут, задаваемый по умолчанию, то он должен быть явно указан следующим образом:
 k !; атрибут по умолчанию ; где узел с идентификатором "атрибут по умолчанию" является знаком атрибута, задаваемого по умолчанию;
- никаких других элементов кортеж k не содержит.

Итак, уточнением понятия схемы отношения (см. пункт 3.3.3) является метаотношение с именем "схема отношения" (быть схемой отношения), связи которого являются кортежами, которые имеют мощность от 2 и выше и которые используют атрибут "отношение_" (быть отношением) и атрибут, задаваемый по умолчанию (см. scbg-текст 3.3.13.1). Примеры использования метаотношения "схема отношения" приведены на scbg-текстах 3.3.13.2 и 3.3.13.3.

SCBg-текст 3.3.13.1. Общий вид отношения "схема отношения"

Здесь r — знак некоторого отношения
 $a_1, a_2, \dots, a_n$ — знаки всех тех и только тех атрибутов, которые используются в связках отношения r .

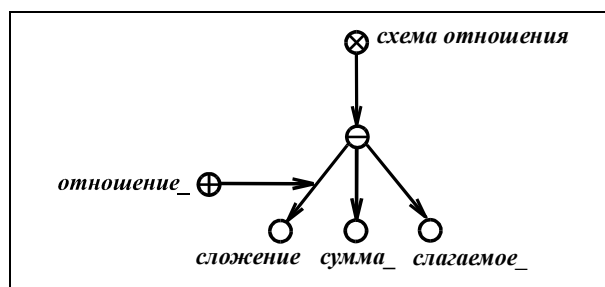


Примечание 1. Метаотношение "схема отношения" можно было бы определить и по-другому:

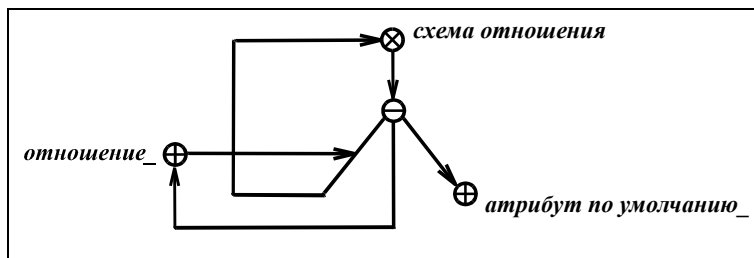
- без атрибута, задаваемого по умолчанию, т.е. с явным введением атрибута "быть элементом схемы отношения_";
- трактовать это метаотношение как бинарное с явным введением знака схемы рассматриваемого отношения.

Примечание 2. Один и тот же кортеж может входить в состав нескольких отношений с разными схемами. Это означает, что в кортежах, принадлежащих заданному отношению, могут использоваться не только атрибуты, входящие в схему этого отношения. Но такие атрибуты в рамках указанного отношения не учитываются. Из всего этого следует также то, что атрибут, задаваемый по умолчанию, соответствует либо тем элементам кортежей, рассматриваемого отношения, которые не отмечены атрибутами, входящими в схему этого отношения (т.е. элементам кортежей, которые вообще никаким атрибутом не отмечены), либо тем элементам кортежей, которые отмечены только атрибутами, не входящими в схему рассматриваемого отношения.

SCBg-текст 3.3.13.2. Пример использования отношения "схема отношения" для отношения "сложение"



SCBg-текст 3.3.13.3. Схема метаотношения "схема отношения"



Определение 3.3.13.3. Определение метаотношения "область определения", являющегося уточнением понятия области определения (см. в пункте 3.3.3). Будем утверждать, что k <! область определения ; в том и только в том случае, если:

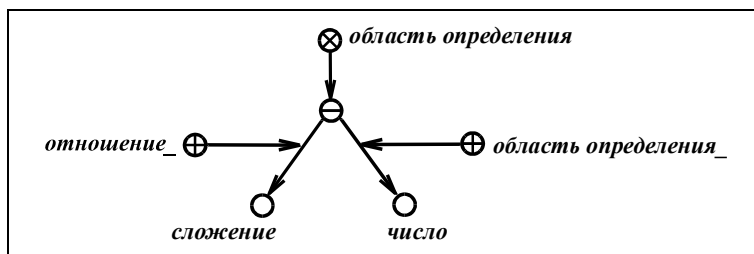
- $k = \square$ отношение_ : r , область определения_ : $r \square$;

- для каждой конструкции вида $r !; c !; x;$ существует конструкция $p !; x;$, т.е. каждый элемент каждой связки отношения r является элементом множества p ;
- и наоборот, для каждой конструкции вида $p !; x;$ существует конструкция $r !; c !; x;$;

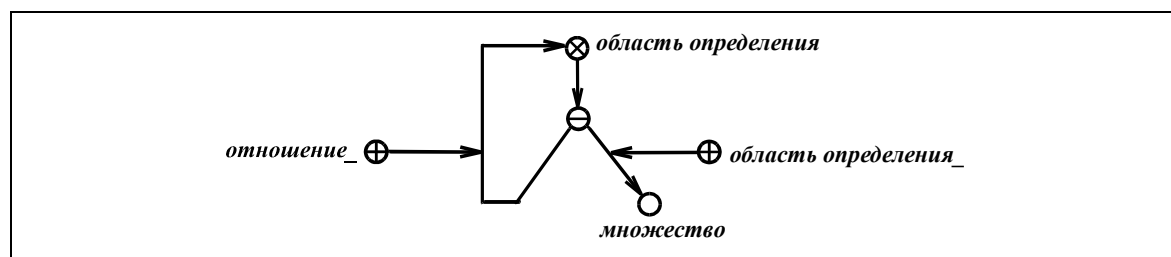
Примеры использования метаотношения “*область определения*” приведены на scbg-текстах 3.3.13.4 и 3.3.13.5.

SCBg-текст 3.3.13.4.

Пример связки метаотношения “*область определения*”, которая означает, что областью определения отношения “*сложение*” является множество всевозможных чисел



SCBg-текст 3.3.13.5. Пример связки метаотношения “*область определения*”, которая означает, что областью определения отношения “*область определения*” является множество знаков всевозможных множеств (куда входят, в частности, и знаки отношений)



Определение 3.3.13.4. Определение метаотношения “*домен*”, являющегося уточнением понятия домена (унарной проекции). Будем утверждать, что $k < ! \text{ домен };$ в том и только в том случае, если:

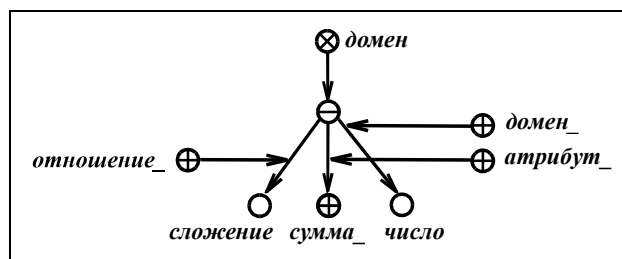
- $k = \square \text{ отношение_} : r, \text{ домен_} : p, \text{ атрибут_} : a \square ;$
- для каждой конструкции вида $r !; c !; a : x;$, существует конструкция $p !; x;$, т.е. каждый элемент каждой связки отношения r , имеющий атрибут a , является элементом множества p ;
- и, наоборот, для каждой конструкции вида $p !; x;$, существует конструкция $r !; c !; a : x;$;
- $p < ! \text{ канторовское множество };$ т.е. множество p не содержит кратных элементов, следовательно, не существует такого y , что $p !; y, y;$.

Примечание. Таким образом, для неориентированных отношений домен получить невозможно, т.к. в этих отношениях нет атрибутов.

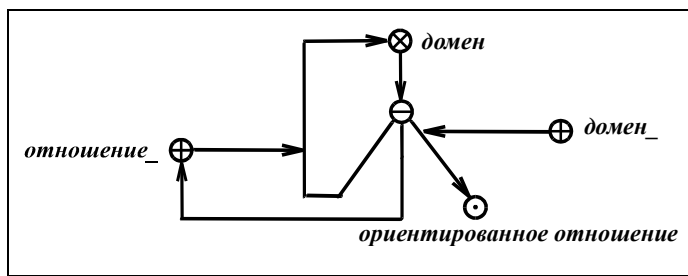
Примеры использования метаотношения “*домен*” приведены на scbg-текстах 3.3.13.6 и 3.3.13.7.

SCBg-текст 3.3.13.6.

Пример связки метаотношения “*домен*”, которая означает, что доменом отношения “*сложение*” по атрибуту “*сумма_*” является множество всевозможных чисел



SCBg-текст 3.3.13.7. Пример связки метаотношения “*домен*”, которая означает, что доменом отношения “*домен*” по атрибуту “*отношение_*” является множество знаков всевозможных ориентированных отношений

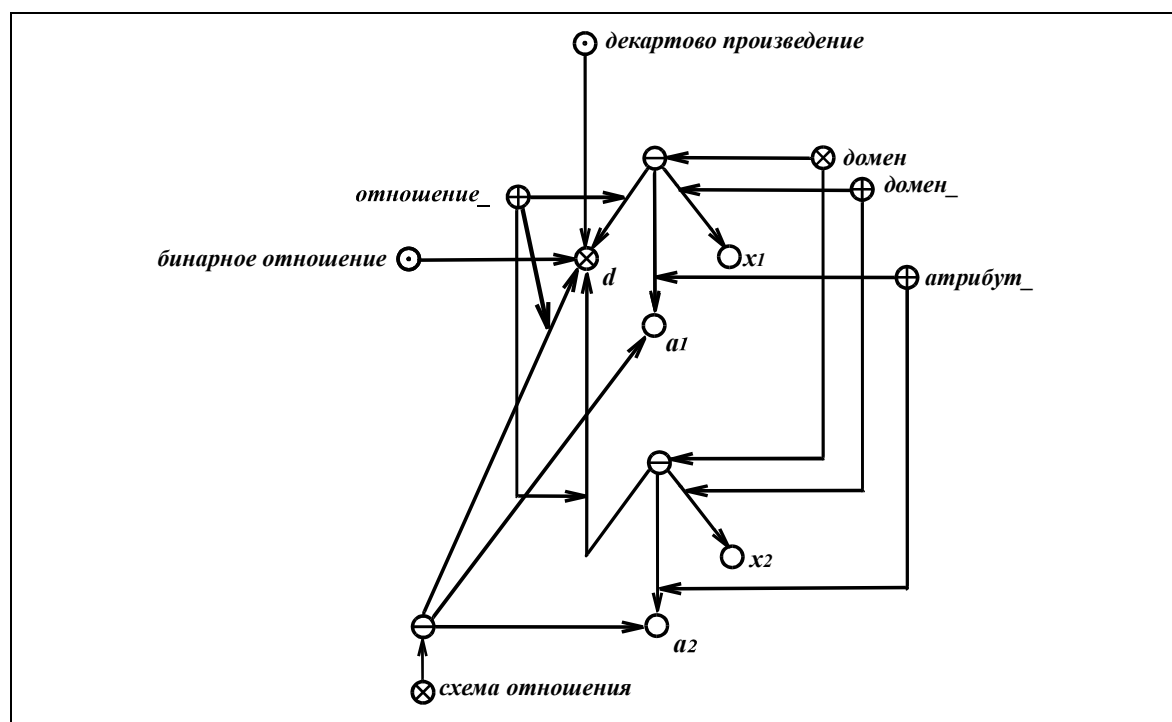


В пункте 3.3.7 в язык SCBs был введен способ условного обозначения декартовых произведений. С помощью метаотношения “*схема отношения*” и метаотношения “*домен*” можно построить scbg-конструкцию, эквивалентную указанному обозначению декартовых произведений (см. scbg-текст 3.3.13.8).

SCBg-текст 3.3.13.8. Пример представления декартова произведения с использованием метаотношений “*схема отношения*” и “*домен*”

$$(x_1(a_1) \times x_2(a_2)) = d ;$$

⇓



Примечание. Декартово произведение вида $(x_1(a_1) \times x_2(a_2))$ можно трактовать как объединение всевозможных бинарных ориентированных отношений, в которых атрибуты a_1 и a_2 составляют схему этих отношений, а множества x_1 и x_2 являются доменами этих отношений соответственно по атрибуту a_1 и по атрибуту a_2 .

Определение 3.3.13.5. Определение метаотношения “*проекция отношения*”, являющегося уточнением понятия неунарной проекции (см. пункт 3.3.4).

Будем утверждать, что $k \leq \text{проекция отношения}$; в том и только в том случае, если:

- 1) $k \leq \text{отношение}_r, \text{проекция}_r, \text{атрибут}_r: a_1, \text{атрибут}_r: a_2, \dots, \text{атрибут}_r: a_n$;

- 2) для каждой конструкции вида $r !; c ;$, в которой каждой конструкции $k !; атрибут_ : ai ;$ соответствует конструкция $c !; ai : x ;$, (т.е. в кортеже c используются все атрибуты, перечисленные в кортеже k ,
существует одна конструкция вида:
 $p !; cp ;$, для которой:
- каждой конструкции вида $r !; c !; aj : y ; k !; атрибут_ : aj ;$ соответствует конструкция $cp !; aj : y ;$, (т.е. в кортеж cp включаются все компоненты кортежа c , имеющие атрибуты, перечисленные в кортеже k);
 - а также каждой конструкции вида $cp ;! gj ;! y ;$ соответствует конструкция $aj !; gj ; r !; c !; aj : y ; k !; атрибут_ : aj ;$ (т.е. в кортеж cp включаются только компоненты кортежа c , имеющие атрибуты, перечисленные в кортеже k);
- 3) и, наоборот, для каждой конструкции вида $p !; cp ;$ существует конструкция:
 $r !; c ;$, для которой:
- имеет место то, что каждой конструкции вида $r !; c !; aj : y ;$
 $k !; атрибут_ : aj ;$ соответствует конструкция $cp !; aj : y ;$ (т.е. в кортеж cp включаются все компоненты кортежа c , имеющие атрибуты, перечисленные в кортеже k);
 - имеет место то, что каждой конструкции $cp ;! gj ;! y ;$ соответствует конструкция $aj !; gj ; r !; c !; aj : y ; k !; атрибут_ : aj ;$ (т.е. в кортеж cp включаются только компоненты кортежа c , имеющие атрибуты, перечисленные в кортеже k);
- 4) не существует такого z , что $z , z <! p ;$ (т.е. p не содержит кратных элементов и, следовательно, является канторовским множеством);
- 5) для каждой конструкции вида $z1 , z2 <! p ;$ справедлива следующая конструкция:
 $\{z1 , z2 \} <\forall \text{ равенство кортежей} ;$ (т.е. множество p представляет собой отношение, не имеющее кратных связей).

Определение 3.3.13.6. Определение метаотношения “*функциональная зависимость*”, менее строгое определение этого понятия см. в пункте 3.3.5. Будем утверждать, что $k <! \text{функциональная зависимость} ;$ в том и только в том случае, если:

- 1) $k !; отношение_ : r ;$
- 2) существует по крайней мере одна конструкция вида $k !; аргумент_ : axi ;$
- 3) существует по крайней мере одна конструкция вида $k !; результат_ : ayi ;$
- 4) не существует ни одной конструкции вида $k !; аргумент_ : axi , результат_ : axi ;$
- 5) не существует ни одной конструкции вида $k ;! gj ;! axi , аргумент_ , результат_ !; gj ;$
- 6) для всех $c1$ и $c2$ имеет место следующая импликация:
 - если существует конструкция вида $r !; c1 , c2 ;$, у которой для всех axi и xi имеет место импликация:
 - если имеет место конструкция вида $k !; аргумент_ : axi ; c1 !; axi : xi ;$
 - то имеет место конструкция вида $k !; аргумент_ : axi ; c1 !; axi : xi ;$
 - то для всех ayi и yi имеет место следующая импликация:
 - если имеет место конструкция вида $k !; аргумент_ : ayi ; c1 !; ayi : yi ;$
 - то имеет место конструкция вида $k !; аргумент_ : ayi ; c1 !; ayi : yi ;$.

Определение 3.3.13.7. Определение метаотношения “*ключевая функциональная зависимость*”, менее строгое определение этого понятия см. в пункте 3.3.5.

Конструкция вида $k <! \text{ключевая функциональная зависимость} ;$
эквивалентна конструкции:

$k <! \text{функциональная зависимость} ; k !; отношение_ : r ;$

$схема отношения !; kc !; отношение_ : r ;$,
для которой справедливо импликативное высказывание:

- если существует конструкция вида
 $k \text{ ; } ! g \text{ ; } ! a \text{ ; отношение_} \forall ; g \text{ ; } ,$
- то справедливо строгое дизъюнктивное высказывание:
- либо существует конструкция вида
 $k \text{ ; } ! \text{ аргумент_} : a \text{ ;}$
- либо существует конструкция вида
 $k \text{ ; } ! \text{ результат_} : a \text{ ;}$

Определение 3.3.13.8. Определение метаотношения “функция”.

Конструкция вида $k \text{ <! функция ;}$
 эквивалентна конструкции:

$k \text{ ; } ! \text{ ключевая функциональная зависимость ; } k \text{ ; } ! \text{ отношение_} : r \text{ ;}$
 $\text{результат_} : a ; ,$
 для которой:

- существует единственная конструкция:
 $k \text{ ; } ! \text{ результат_} : a ; \quad /* \text{ Для } a ; = a ; */$
- имеет место импликация:
 - если дана конструкция вида $k \text{ ; } ! c \text{ ; } ,$
 - то существует единственная конструкция $c \text{ ; } ! a ; : u ;$
- имеет место импликация:
- если дана конструкция вида
 $\text{проекция_} : ! ; k ; ! \text{ отношение_} : r \text{ ; проекция_} : r \text{ ;}$
у которой:
 - существует конструкция:
 $k ; ! \text{ атрибут_} : a ; \text{ атрибут_} : a ;$
 $/* \text{ Т.е. существует по крайней мере проекция отношения с двумя атрибутами, по которым берется } */$
 $/* \text{ проекция отношения } r . \text{ Следовательно, речь идет о неунарной проекции. } */$
 - конструкция вида
 $k ; ! \text{ атрибут_} : a ;$
эквивалентна конструкции:
 $k ; ! \text{ аргумент_} : a ;$
 $/* \text{ Т.е. каждый атрибут, по которому берется проекция отношения } r , \text{ является } */$
 $/* \text{ атрибутом-аргументом функциональной зависимости. И наоборот. } */$
- то справедлива конструкция вида
 $r \text{ <! декартово произведение ;}$

К числу метаотношений над классическими отношениями (т.е. к числу метаотношений, которые не распространяются на область всевозможных отношений), в частности, относятся:

- метаотношение “минимальное декартово произведение” – это метаотношение, которое является подмножеством метаотношения “включение множества” и которое связывает каждое классическое отношение с таким декартовым произведением, которое является его минимальным надмножеством (т.е. таким декартовым произведением, для которого не существует другого декартова произведения, которое было бы подмножеством первого и надмножеством рассматриваемого классического отношения);
- метаотношение “дополнение до декартова произведения” – это метаотношение, которое является подмножеством метаотношения “разбиение множества” и которое связывает каждое классическое отношение с его минимальным декартовым произведением и с разностью минимального декартова произведения и рассматриваемого классического отношения;
- метаотношение “соединение отношений” – это тернарное метаотношение, каждый кортеж которого связывает два классических отношения, имеющих один общий атрибут, с классическим отношением, каждый кортеж которого есть результат объединения одного из кортежей, принадлежащих первому исходному отношению, и одного из кортежей, принадлежащих второму исходному отношению (при этом в объединяемых кортежах компоненты, имеющие общий для исходных отношений атрибут, должны совпадать).

Очевидно, что для каждого классического отношения существует единственное минимальное декартово произведение и единственное дополнение до этого минимального декартова произведения.

Очевидно также, что если два соединяемых классических отношения будут являться соответственно m -арным и n -арным, то классическое отношение, полученное в результате их соединения по указанному (общему) атрибуту, будет $(m + n - 1)$ -арным.

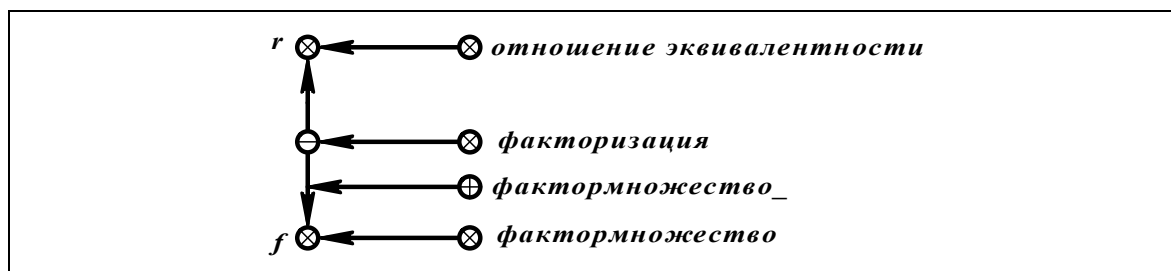
Очевидно также, что если взять проекцию отношения, полученного в результате соединения отношений r_1 и r_2 , по всем атрибутам, входящим в схему отношения r_1 , то получим само это отношение r_1 .

Метаотношения над бинарными классическими отношениями рассматривались выше. Перечислим некоторые из них:

- метаотношение **“произведение бинарных отношений”** – это метаотношение, каждый кортеж которого имеет вид $\square \{r_1, a_1\}, \{r_2, a_2\}, \text{произведение_} : r_3 \square$, где r_1, r_2, r_3 – бинарные классические отношения с одинаковыми схемами $\{a_1, a_2\}$, при этом конструкция $r_3 !; \square a_1 : x_1, a_2 : x_2 \square$; имеет место тогда и только тогда, когда существует z такой, что $r_1 !; \square a_1 : x_1, a_2 : z \square ; r_2 !; \square a_1 : z, a_2 : x_2 \square$; [464] (Таран Т.А.1998кн-ОсновДМ);
- метаотношение **“транзитивное замыкание”** [464] (Таран Т.А.1998кн-ОсновДМ);
- метаотношение **“соответствие”** и различные подмножества этого метаотношения.

Каждому отношению эквивалентности можно поставить в соответствие факормножество, осуществляющее разбиение области определения этого отношения на классы эквивалентности. Связь между отношением эквивалентности r и соответствующим ему факормножеством f задается с помощью бинарного ориентированного метаотношения, которому припишем идентификатор **“факторизация”** (см. scb-текст 3.3.13.9).

SCB-текст 3.3.13.9. Отношение **“факторизация”**

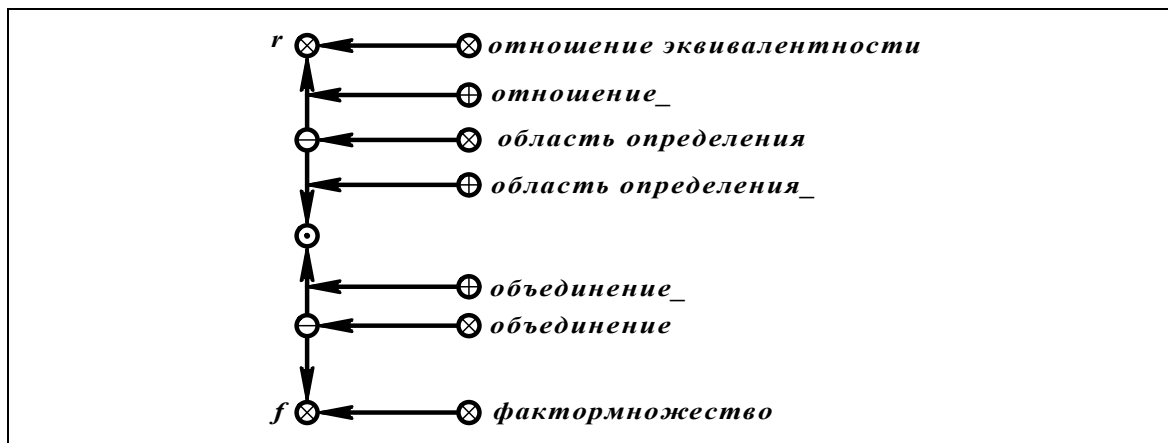


При этом имеют место следующие синонимичные соотношения идентификаторов:

факормножество
 = **попарно непересекающиеся множества**
 = **семейство попарно непересекающихся множеств ;**

Семантически факормножество представляет собой не что иное, как один из возможных признаков (свойств) классификации множества, являющегося областью определения соответствующего отношения эквивалентности (см. scb-текст 3.3.13.10).

SCB-текст 3.3.13.10. Классификации множества, являющегося областью определения соответствующего отношения эквивалентности



С формальной точки зрения каждое фактормножество можно трактовать как неориентированное отношение, связи которого имеют нефиксированную и часто достаточно большую мощность. Элементами каждой такой связки являются все те и только те объекты, которые в определенном смысле эквивалентны некоторому заданному объекту.

Упражнения к пункту 3.3.13.

Упражнение 3.3.13.1. Можно ли говорить о неунарной проекции неклассического отношения?

Упражнение 3.3.13.2. Можно ли говорить о функциональной зависимости для неклассического отношения?

Упражнение 3.3.13.3. Существует ли хотя бы одно отношение, которому соответствует несколько функциональных зависимостей (несколько ключей), или несколько функций, или несколько операций? Если да, то приведите примеры.

Упражнение 3.3.13.4. Чем отличаются:

- функциональная зависимость от ключевой зависимости;
- ключевая зависимость от функции;
- функция от операции?

3.3.14. Числовые отношения

К числу отношений, заданных на множестве чисел, можно отнести следующие:

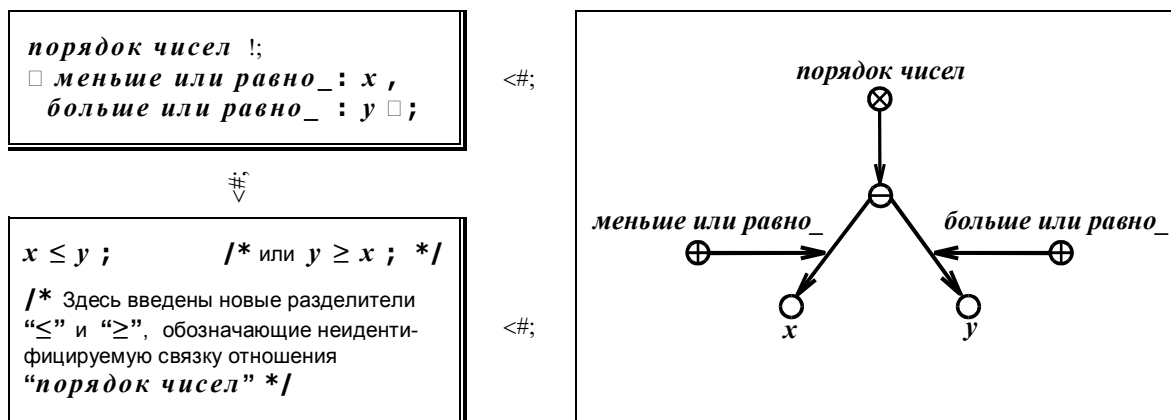
- **“порядок чисел”** – бинарное ориентированное отношение с атрибутом **“меньше или равно_”** и атрибутом **“больше или равно_”**;
- **“строгий порядок чисел”** – бинарное ориентированное отношение с атрибутом **“меньше_”** и атрибутом **“больше_”**;
- **“последовательность целых чисел”** – бинарное ориентированное антисимметричное отношение, использующее атрибут **“предшествующее_”** и атрибут **“следующее_”**, заданное на множестве целых чисел. Каждый кортеж этого отношения связывает два целых числа, первое из которых непосредственно предшествует второму, а второе – непосредственно следует за первым (т.е. является результатом прибавления единицы к первому числу);
- **“арифметическое отрицание”** – бинарное неориентированное отношение;
- **“числовой модуль”** – бинарное ориентированное отношение с атрибутом **“модуль_”** и с атрибутом, задаваемым по умолчанию;
- **“целая часть числа”** – бинарное ориентированное отношение с атрибутом **“целое_”** и с атрибутом, задаваемым по умолчанию;

- “**сложение**” – ориентированное отношение со связками разной мощности (но не менее 3) и с атрибутами “**сумма_**” и “**слагаемое_**” (последний атрибут может задаваться по умолчанию);
- “**умножение**” – ориентированное отношение со связками разной мощности (но не менее 3) и с атрибутами “**произведение_**” и “**сомножитель_**” (последний атрибут может задаваться по умолчанию);
- “**степень**” – классическое тернарное отношение с атрибутами “**корень_**” (основание степени), “**логарифм_**” (показатель степени), “**степень_**” (результат возведения в степень);
- “**факториал**” – классическое бинарное отношение с атрибутами “**факториал_**” и “**основание_**”;
- “**sin**” – классическое бинарное отношение с атрибутами “**sin_**” и “**arcsin_**”;
- “**cos**” – классическое бинарное отношение с атрибутами “**cos_**” и “**arccos_**”;
- “**tg**” – классическое бинарное отношение с атрибутами “**tg_**” и “**arctg_**”;
- “**ctg**” – классическое бинарное отношение с атрибутами “**ctg_**” и “**arcctg_**”.

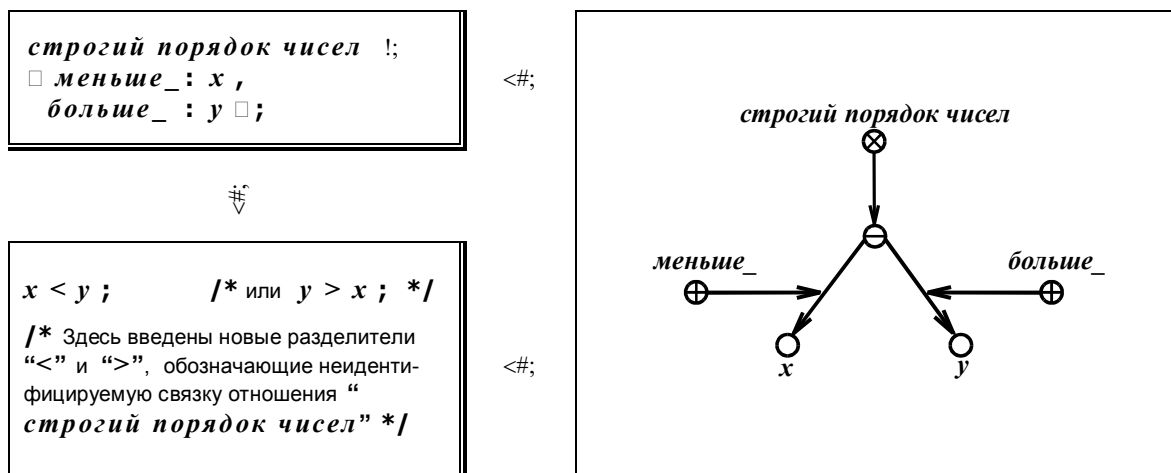
Примечание. Следует четко отличать числовые отношения и действия, направленные на вычисление неизвестных чисел, связанных указанными отношениями между собой и с известными числами. В частности, элементарным таким действием является вычисление неизвестного числа, для которого существует кортеж одного из указанных отношений, связывающий вычисляемое число только с известными числами. При этом одному отношению может соответствовать несколько таких действий. Например, отношению “**сложение**” соответствуют действие сложения и действие вычитания, отношению “**степень**” – действие вычисления корня, действие вычисления логарифма, действие возведения в степень.

Рассмотрим возможные варианты изображения кортежей для некоторых из перечисленных отношений, вводя для их записи в язык SCBs новые разделители (см. scb-тексты 3.3.14.1 – 3.3.14.8) и новые виды сложных scb-идентификаторов.

SCB-текст 3.3.14.1. Варианты изображения отношения нестрогого порядка чисел



SCB-текст 3.3.14.2. Варианты изображения отношения строгого порядка чисел



SCB-текст 3.3.14.3. Варианты изображения отношения арифметического отрицания

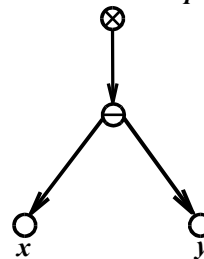
арифметическое отрицание
!; { x , y };

<#;

↙

$x = (!y);$ /* или $y = (!x);$ */
/* Сложный идентификатор вида (! y) обозначает число, являющееся результатом арифметического отрицания числа x */

<#;

арифметическое отрицание

SCB-текст 3.3.14.4. Варианты изображения отношения арифметического сложения и вычитания

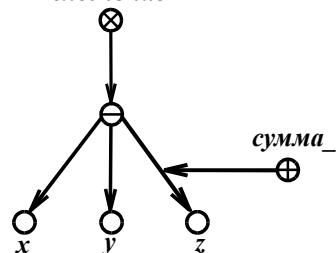
сложение !;
□ x , y , *сумма_*: z □ ;

<#;

↙

$z = (x + y);$
/* или $z = (y + x);$ */
/* Сложный идентификатор вида ($y + x$) обозначает число, являющееся результатом сложения чисел x и y */

<#;

сложение#
↙#
↙

$x = (z - y);$ /* или $y = (z - x);$ */

/* Сложный идентификатор вида ($z - y$) обозначает число, являющееся результатом вычитания числа y из числа z . При этом число y называют вычитаемым, а число z – уменьшаемым. Аналогично – ($z - x$) */

SCB-текст 3.3.14.5. Варианты изображения отношения арифметического умножения и деления

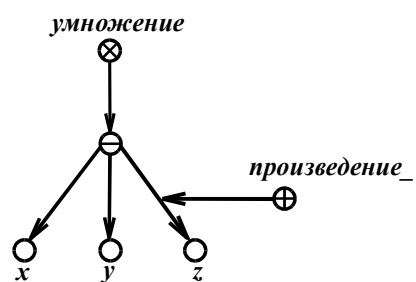
умножение !;
 $\square x, y, \text{ произведение_} : z \square ;$

<#;



$z = (x \bullet y);$
/ или $z = (y \bullet x); */$*
/ Сложный идентификатор вида $(y \bullet x)$ обозначает число, являющееся результатом умножения чисел x и y */*

<#;



$x = (z / y);$ */* или $y = (z / x); */$*
/ Сложный идентификатор вида (z / y) обозначает число, являющееся результатом деления числа z на число y . При этом число z называют делимым, а число y – делителем. Аналогично – $(z / x) */$*

SCB-текст 3.3.14.6. Варианты изображения отношения “*степень*”

степень !;
 $\square$ *корень_* : a ,
логарифм_ : n ,
степень_ : z $\square$;

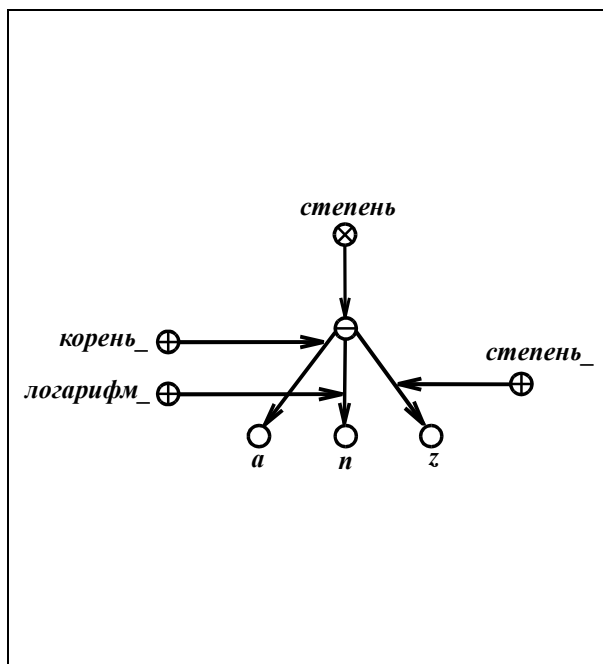
<#;



$z = (a \uparrow n);$

*/** Сложный идентификатор вида $(a \uparrow n)$ обозначает число, являющееся результатом возведения числа a в n -ую степень. При этом число a называют основанием степени, число n – показателем степени, а число z – степенью. В математической литературе рассматриваемый сложный идентификатор имеет вид a^n .
**/*

<#;



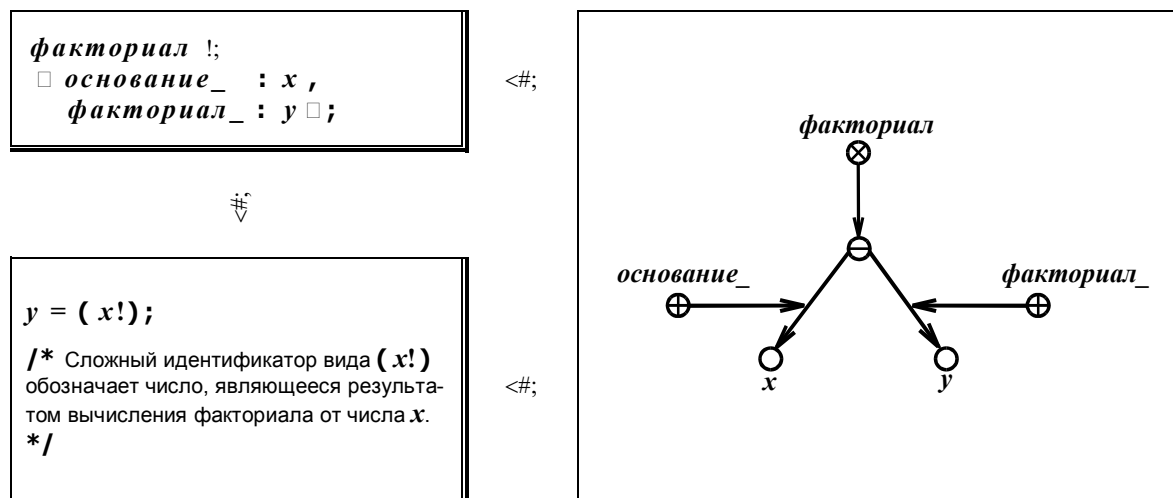
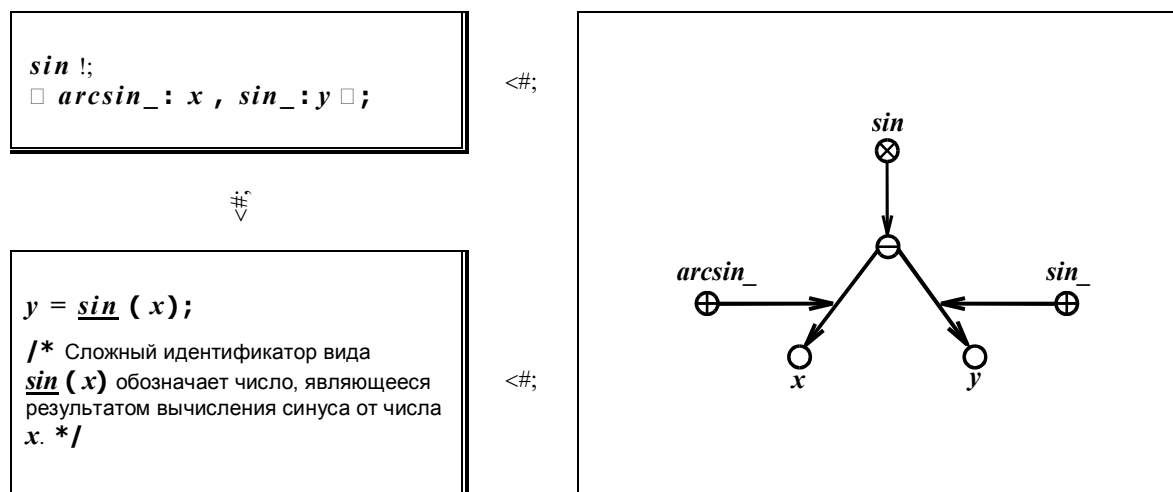
$a = (n \sqrt{z});$

*/** Сложный идентификатор вида $(a \sqrt{n})$ обозначает число, являющееся результатом извлечения корня n -ой степени из числа z . При этом число z называют подкоренным числом, число n – показателем корня, а число a – корнем. В математической литературе рассматриваемый сложный идентификатор имеет вид ${}^n\sqrt{z}$.
**/*



$n = \log(a, z);$

*/** Сложный идентификатор вида $\log(a, z)$ обозначает число, являющееся результатом взятия логарифма числа z по основанию a . При этом число a называют основанием логарифма, число z – логарифмируемым числом, а число n – логарифмом. В математической литературе рассматриваемый сложный идентификатор имеет вид $\log_a z$.
**/*

SCB-текст 3.3.14.7. Варианты изображения отношения “*факториал*”

SCB-текст 3.3.14.8. Варианты изображения отношения “*sin*”


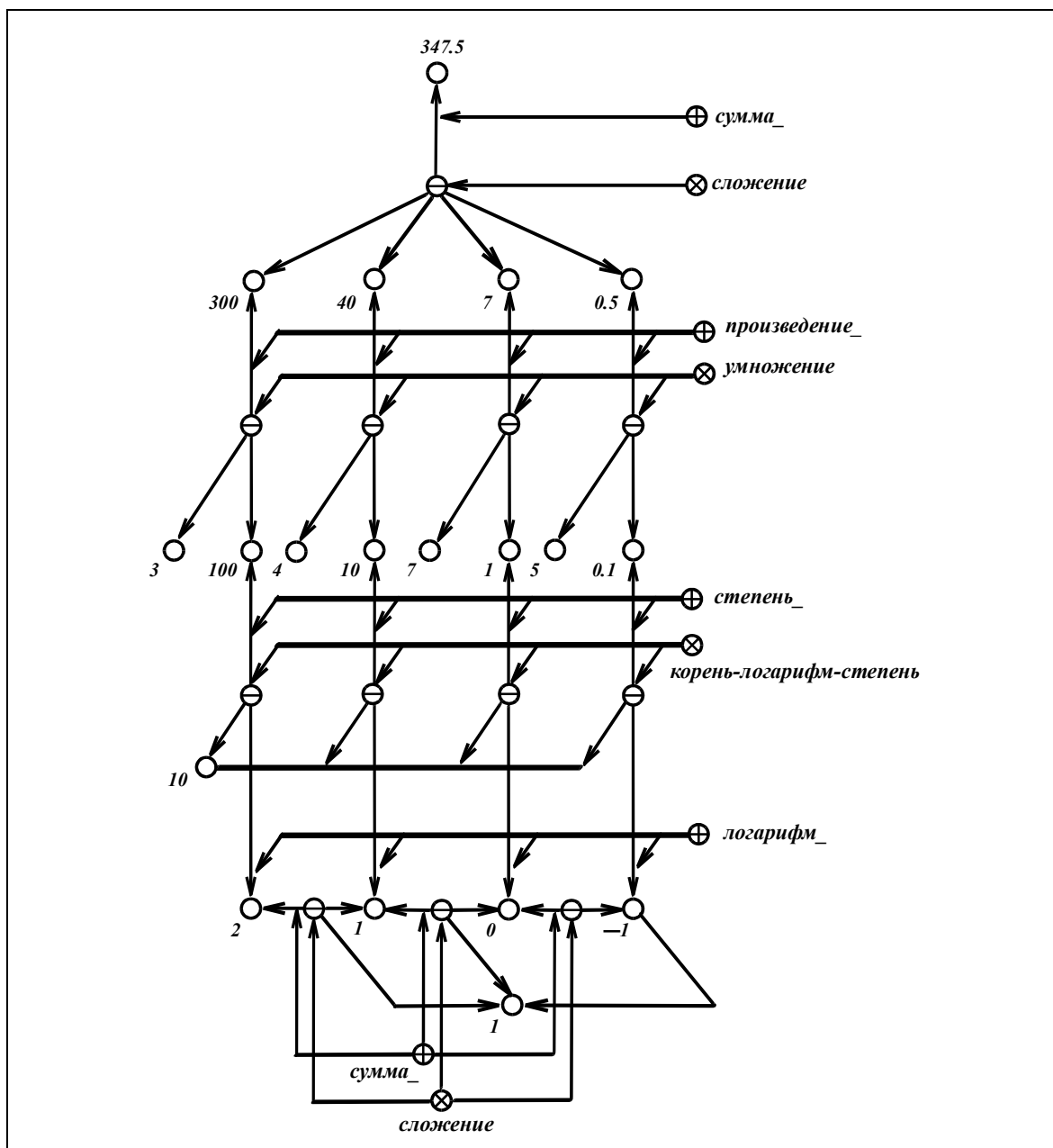
Примечание. Ключевые слова, используемые при построении сложных идентификаторов и совпадающих с идентификаторами соответствующих отношений, всегда подчёркиваются, чтобы их отличить от идентификаторов этих отношений. Следовательно, например, ключевое слово “sin” в сложном идентификаторе вида “sin (x)” и простой идентификатор “sin”, обозначающий соответствующее отношение, имеют разную семантику.

Формально вычисление неизвестного числа заключается в построении представления этого числа в той или иной системе счисления. Так, например, представление числа в десятичной системе счисления – это рассмотрение его как суммы чисел, каждое из которых является произведением десятичной цифры (т.е. натурального числа в диапазоне от 0 до 9) на число, являющееся результатом возведения числа 10 в целую степень.

В качестве примера приведем представление на языке SCB числа 347.5 в десятичной системе счисления (см. scbg-текст 3.3.14.1). Напомним, что представление числа x в позиционной (в частности, в десятичной) системе счисления есть его разложение на слагаемые следующего вида

$$x = \sum_i xi \times a^i, \text{ где}$$

- i – целое число,
- a – натуральное число, являющееся основанием (базисом) системы счисления (для десятичной системы – это число 10),
- xi – натуральное число, находящееся в интервале $0 \leq xi \leq (a - 1)$.

SCB-текст 3.3.14.1. Представление числа 347.5 в десятичной системе счисления

Нетрудно заметить, что с позиции языка SCB суть представления чисел в той или иной системе счисления заключается в построении взаимно однозначного соответствия между представляемыми числами и такими scb-текстами (конструкциями), в которых используется конечное количество заранее известных (одних и тех же, зафиксированных) для каждой системы счисления scb-узлов. Указанные узлы будем называть ключевыми узлами соответствующей системы счисления. Для десятичной системы счисления такими ключевыми узлами являются:

- знаки натуральных чисел в интервале от 0 до 9 включительно (десятичные цифры);
- знак числа 10 (основание десятичной системы счисления);
- знаки отношений “*сложение*”, “*умножение*”, “*корень-логарифм-степень*”;
- знаки атрибутов “*сумма_*”, “*произведение_*”, “*корень_*”, “*логарифм_*”, “*степень_*”.

Итак, теоретико-множественная трактовка (на основе понятий языка SCB) десятичного представления заданного числа есть построение scb-конструкции указанного выше вида (конструкции, которая однозначно задает представляемое число) и привязка этой конструкции к перечисленным выше ключевым

узлам. Привязка сводится к выявлению в построенной конструкции узлов, синонимичных ключевым узлам, и к последующему склеиванию таких синонимичных узлов.

Принципиальными здесь являются следующие обстоятельства:

- указанная привязка есть не что иное, как процедура ввода информации, являющейся десятичным представлением некоторого числа и записанной на языке SCB. Имеется в виду ввод информации в память системы, где хранящаяся там информация также представлена на языке SCB. То есть ввести информацию в такую память – это построить некоторую scb-конструкцию (scb-текст) и склеить некоторые ее scb-узлы с узлами, уже хранящимися в памяти;
- ключевые узлы, к которым осуществляется привязка вводимой информации заданного вида, должны быть заранее известны (!) и соответственно количество их должно быть конечным;
- после привязки вводимого scb-текста к ключевым узлам некоторые неключевые узлы вводимого текста могут оказаться синонимичными тем узлам, которые уже присутствуют в текущем состоянии памяти, и, следовательно, должны подлежать склеиванию с последними. Но принципиальным здесь является то, что такого рода синонимия может быть выявлена формальными средствами без участия субъекта, который инициирует ввод информации.

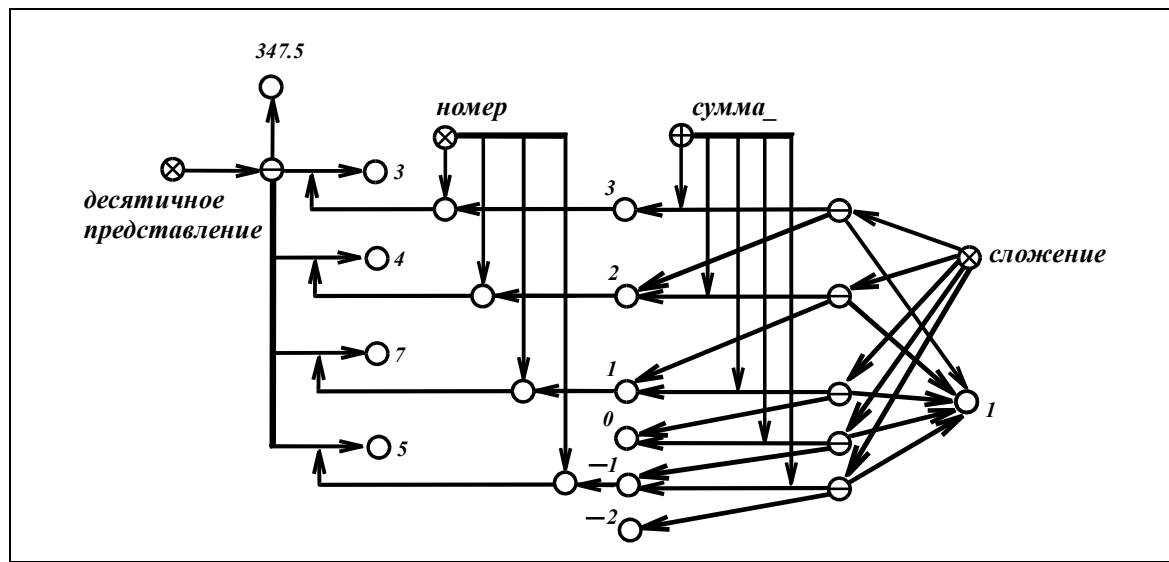
Примечание. В рамках отношения “*сложение*” можно выделить подмножество “*сложение десятичное*”, в кортежах которого все слагаемые имеют вид $(xi \bullet (10 \uparrow i))$, где

- xi – натуральное число, находящееся в интервале $0 \leq xi \leq 9$;
- i – целое число.

Очевидно, что десятичное представление числа в языке SCB можно также трактовать как кортеж специального отношения “*десятичное представление*”, заданного на множестве десятичных цифр (т.е. натуральных чисел от 0 до 9) и использующего атрибуты, задающие номер соответствующего разряда в десятичном представлении.

В качестве примера на scbg-тексте 3.3.14.2 приведено представление числа 347.5 с помощью указанного специального отношения.

SCBg-текст 3.3.14.2. Представление числа 347.5 в десятичной системе счисления с помощью отношения “*десятичное представление*”

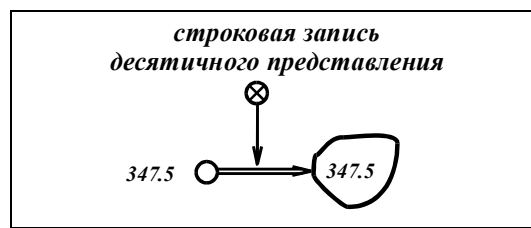


Примечание 1. Понятие порядкового номера расширяется на область всех целых чисел, т.к. порядковым номером может быть не только натуральное число, но и целое отрицательное число. При этом порядковый номер для отношения “*десятичное представление*” суть не что иное, как номер соответствующего десятичного разряда.

Примечание 2. Представляемое число здесь указывается с помощью атрибута, задаваемого по умолчанию.

Учитывая то, что десятичное представление чисел легко и однозначно изображается в виде цепочки символов (цепочки цифр), это представление можно изображать в виде содержимого scb-узла. При этом scb-узел, обозначающий число, и scb-узел, содержимое которого является строковым изображением десятичного представления этого числа, связаны отношением “*строковая запись десятичного представления*” (см. scbg-текст 3.3.14.3).

SCB g-текст 3.3.14.3. Представление числа 347.5 с использованием отношения “*строковая запись десятичного представления*”



Примечание. В данном случае строковая запись десятичного представления заданного числа (содержимое соответствующего scb-узла) совпадает с идентификатором того scb-узла, который является знаком этого числа. Но это совсем не обязательно. Идентификаторы чисел (числовых констант) могут формироваться достаточно произвольным образом, в частности, в тех случаях, когда десятичное представление числа в текущий момент не известно.

Числовые отношения можно условно разбить на следующие классы:

- отношения, областью определения которых является либо множество всевозможных чисел, либо множество чисел определенного класса (натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных);
- отношения, в область определения которых входят не только числа, но и множества чисел;
- отношения, заданные на множестве числовых отношений того или иного вида (такие отношения будем называть числовыми метаотношениями).

К числовым метаотношениям, в частности, относится метаотношение, связывающее две числовые функции, одна из которых является результатом дифференцирования другой.

Резюме к подразделу 3.3

В заключение рассмотрения понятия отношения и его трактовки в терминах языка SCB заметим, что рассмотренная выше типология отношений может быть расширена и модифицирована в соответствии с потребностями конкретного разработчика и конкретной предметной области, для которой формируются соответствующие отношения. В данном подразделе были рассмотрены лишь основные типы отношений, используемых практически в любой предметной области. При этом следует также заметить, что любое отношение на языке SCB может быть представлено различными способами. Расширение набора отношения производится путем добавления к набору существующих ключевых scb-узлов новых scb-узлов, обозначающих соответствующие отношения предметной области.

3.4. Представление реляционных структур в языке SCB. Типология реляционных структур. Классические и неклассические реляционные структуры

Ключевые понятия: реляционная структура, графовая структура, изоморфизм, гомоморфизм.

В **подразделе 1.2** было рассмотрено понятие реляционной структуры. Данный подраздел посвящён уточнению этого понятия и рассмотрению способов представления реляционных структур на языке SCB.

3.4.1. Представление реляционных структур в языке SCB

Ключевые понятия: реляционная структура, сигнатурное отношение, сигнатурное множество, сигнатурный атрибут, первичный элемент реляционной структуры, вторичный элемент реляционной структуры, метаотношение, функция реляционной структуры, операция реляционной структуры.

Во 2-м разделе были рассмотрены такие математические структуры, как **множества, кортежи, отношения**. При этом нас интересовал:

- переход от классических (канторовских) множеств к неклассическим множествам (мультимножествам) и введение обобщенного понятия множества, включающего в себя как классические, так и неклассические множества;
- переход от классических кортежей к неклассическим и введение обобщенного понятия кортежа, включающего в себя как классические его варианты, так и неклассические;
- переход от классических отношений к неклассическим и введение обобщенного понятия отношения, включающего в себя как классические, так и неклассические его варианты.

В данном подразделе рассмотрим обобщение таких математических понятий, как алгебраическая система, алгебраическая модель, алгебра. Объединение перечисленных классов математических структур назовем **классической реляционной структурой**.

Каждая классическая реляционная структура (конструкция) включает в себя:

- некоторое семейство классических отношений, которое будем называть **сигнатурными отношениями** реляционной структуры (при этом некоторым отношениям из указанного семейства могут быть поставлены в соответствие функции или алгебраические операции с помощью соответствующих метаотношений);
- некоторое семейство специально выделенных множеств, которые будем называть **сигнатурными множествами** реляционной структуры (заметим, что сигнатурные множества в реляционной структуре могут отсутствовать);
- некоторое множество, которое будем называть **носителем реляционной структуры** и которое представляет собой нестрогое надмножество объединения всех указанных выше сигнатурных множеств реляционной структуры, а также областей определения всех указанных выше сигнатурных отношений, входящих в состав классической реляционной структуры.

Переход от классических реляционных структур к неклассическим и соответствующее этому введение обобщенного понятия реляционной структуры осуществляются по следующим направлениям:

- использование отношений, в область определения каждого из которых входят знаки связок этого же отношения и/или знаки связок других отношений этой же реляционной структуры, и/или знаки самих этих отношений (т.е. речь идет о связках, описывающих связи между другими связками, а также между отношениями);
- использование отношений, в область определения которых входят знаки реляционных структур (в частности, и знак той реляционной структуры, в состав которой эти отношения входят);
- использование в составе реляционной структуры не только классических, но и неклассических отношений;
- ослабление требования о том, чтобы сигнатурное множество реляционной структуры было подмножеством множества-носителя реляционной структуры. Для неклассической реляционной структуры на базе ее множества-носителя строится универсум, включающий в себя (1) все элементы этого носителя, которые будем называть первичными элементами универсума реляционной структуры, и (2) вторичные элементы универсума этой реляционной структуры, которые представляют собой знаки всевозможных неориентированных множеств и кортежей, составленных из первичных и/или вторичных элементов реляционной структуры. После этого считается, что элементами реляционной структуры являются не все элементы ее сигнатурных множеств, а только те, которые оказались элементами универсума реляционной структуры – чаще всего первичными элементами;
- ослабление требования о том, чтобы область определения отношения реляционной структуры была подмножеством множества-носителя реляционной структуры (в число элементов неклассической реляционной структуры включаются не все связки ее унарных отношений, а только те, которые оказались вторичными элементами универсума реляционной структуры).

Итак, в состав реляционной структуры общего вида входят:

- элементы множества-носителя (множества первичных элементов) реляционной структуры;
- знаки сигнатурных множеств реляционной структуры;
- знаки сигнатурных отношений реляционной структуры;
- знаки атрибутов, входящих в схемы сигнатурных отношений реляционной структуры (такие атрибуты будем называть сигнатурными атрибутами);
- знаки атрибутов, используемых для построения таких вторичных элементов реляционной структуры, которые являются элементами унарных отношений этой реляционной структуры, в том числе те элементы сигнатурных множеств реляционной структуры, которые являются элементами универсума этой структуры;
- те знаки связок сигнатурных отношений реляционной структуры, которые являются вторичными элементами универсума этой реляционной структуры;

- промежуточные вторичные элементы реляционной структуры – это элементы, которые не входят в число вышеперечисленных элементов реляционной структуры и являются элементами множеств, обозначаемых вышеуказанными вторичными элементами реляционной структуры (т.е. теми вторичными элементами универсума реляционной структуры, которые являются элементами сигнатурных множеств и отношений этой реляционной структуры). При этом, если промежуточный вторичный элемент реляционной структуры одним из своих элементов имеет вторичный элемент универсума этой реляционной структуры, не попавший в вышеуказанные классы элементов реляционной структуры, то этот вторичный элемент универсума также приписывается к числу промежуточных вторичных элементов реляционной структуры;
- знаки атрибутов, используемых для построения промежуточных вторичных элементов реляционной структуры. Эти атрибуты также включаются в число сигнатурных атрибутов реляционной структуры.

Таким образом:

- все первичные элементы универсума реляционной структуры становятся первичными элементами самой реляционной структуры;
- не все вторичные элементы универсума реляционной структуры становятся вторичными элементами самой этой реляционной структуры (т.е. указанные понятия следует четко отличать);
- не все элементы сигнатурных множеств и отношений реляционной структуры становятся элементами этой реляционной структуры;
- не все элементы сигнатурных атрибутов реляционной структуры входят в состав этой реляционной структуры.

Каждая реляционная структура рассматривается как формальная (математическая) модель некоторой предметной области, а используемые в реляционной структуре знаки сигнатурных атрибутов – как "носительные" понятия соответствующей предметной области. При этом сигнатурные множества и отношения реляционной структуры есть не что иное, как "абсолютные" понятия указанной предметной области. При этом будем отличать сигнатурные элементы, соответствующие неопределяемым (исходным, базовым) понятиям, а также сигнатурные элементы, которые соответствуют определяемым понятиям. Заметим при этом, что для одной реляционной структуры может существовать несколько вариантов разбиения используемых понятий на неопределяемые (основные, базовые) и определяемые.

Итак, семейство всех реляционных структур общего вида мы разбили на два класса:

- классические реляционные структуры,
- неклассические реляционные структуры.

Заметим при этом, что среди всевозможных неклассических реляционных структур наибольший интерес для нас представляют такие структуры, у которых в область определения их отношений входят знаки отношений, знаки атрибутов, знаки систем множеств (в том числе знаки реляционных структур). Такого рода реляционные структуры будем называть иерархическими реляционными структурами или сложноструктурированными реляционными конструкциями.

Особо подчеркнем то, что для интеллектуальных систем возможность работать с неклассическими, в частности с иерархическими реляционными структурами имеет принципиальное значение, так как подавляющее число предметных областей прикладных интеллектуальных систем носит именно такой характер.

Для строгого рассмотрения понятия реляционной структуры используются следующие введенные нами ранее понятия:

- универсум (над заданным множеством и заданным семейством атрибутов – см. пункт 1.2.1);
- отношение подчинения (результат транзитивного замыкания отношения принадлежности);
- отношение смежности (результат симметризации отношения принадлежности);
- отношение связности (транзитивное замыкание отношения смежности);

Уточнение понятия реляционной структуры общего вида проведем, опираясь на введенное нами в подразделе 2.1 понятие **системы множеств**. Каждую реляционную структуру будем трактовать как систему множеств, в которой тем или иным образом распределены роли между ее элементами. Напомним, что каждая конкретная система множеств представляет собой множество, элементами которого являются знаки множеств и в том числе знаки тех пар принадлежности, которые связывают между собой знаки множеств, входящих в состав системы множеств.

Перейдем к строгому определению понятия реляционной структуры (см. также пункт 1.2.1).

Определение 3.4.1.1. **Реляционная структура** – это такая система множеств, для которой каждому ее элементу дополнительно приписывается некоторая его роль в рамках этой системы множеств. Для указания роли элементов реляционных структур используются следующие атрибуты:

- *первичный элемент* (= *primaryEl*) (быть первичным элементом реляционной структуры);
- *сигнатурный атрибут* (= *attr*) (быть знаком атрибута, используемого в кортежах, знаки которых являются вторичными элементами реляционной структуры);
- *сигнатурное отношение* (= *rel*) (быть знаком сигнатурного отношения реляционной структуры);
- *сигнатурное множество* (быть знаком сигнатурного множества реляционной структуры).

Вторичный элемент реляционной структуры G – это знак множества, все элементы которого являются элементами структуры G и у которого элементами структуры G являются также знаки всех пар принадлежности, связывающих указанный выше знак множества с элементами этого множества. Очевидно также, что вторичными элементами реляционной структуры следует считать все входящие в неё знаки пар принадлежности, у которых соединяемые этими парами scb-элементы также являются элементами реляционной структуры. Если для какой-либо пары принадлежности указанные условия не выполняются, то знак этой пары в рамках соответствующей реляционной структуры может выполнять роль только ее первичного элемента.

Первичными элементами реляционной структуры могут быть знаки любых объектов (знаки пар принадлежности, знаки узловых множеств неутонченного типа, знаки кортежей, знаки атрибутов, знаки отношений, знаки реляционных структур).

Таким образом, трактовка системы множеств как реляционной структуры "преобразует" систему множеств из неориентированного множества в кортеж и соответственно этому само понятие реляционной структуры можно трактовать как ориентированное отношение, схема которого состоит из вышеперечисленных атрибутов. Точнее говоря, отношение "**реляционная структура**" является ещё одним примером метаотношений (см. пункт 3.3.13). В каждом кортеже, принадлежащем отношению "**реляционная структура**":

- существует по крайней мере один компонент с атрибутом "*первичный элемент*";
- могут отсутствовать компоненты с атрибутом "*сигнатурный атрибут*";
- существует по крайней мере один компонент с атрибутом "*сигнатурное отношение*";
- могут отсутствовать компоненты с атрибутом "*сигнатурное множество*";
- существует по крайней мере один вторичный несигнатурный элемент, который представляет собой компонент с атрибутом, задаваемым по умолчанию, т.е. существует по крайней мере один компонент без явно указанного атрибута;
- не существует ни одного компонента, который был бы отмечен сразу несколькими атрибутами из числа вышеперечисленных;
- для каждого компонента si с атрибутом, задаваемым по умолчанию, существует компонент ri , имеющий либо атрибут "*сигнатурное отношение*", либо атрибут "*сигнатурное множество*", по отношению к которому компонент si является подчиненным, т.е. связанным выходящей из ri парой неявно заданного отношения подчинения, которое является транзитивным замыканием подмножества отношения принадлежности, состоящего из только тех пар принадлежности, знаки которых являются компонентами структуры с атрибутом, задаваемым по умолчанию.

Термин "**реляционная структура**" можно трактовать как знак ориентированного неклассического отношения с кортежами разной мощности и со схемой, включающей в себя атрибуты: "*первичный элемент*", "*сигнатурный атрибут*", "*сигнатурное отношение*" и "*сигнатурное множество*".

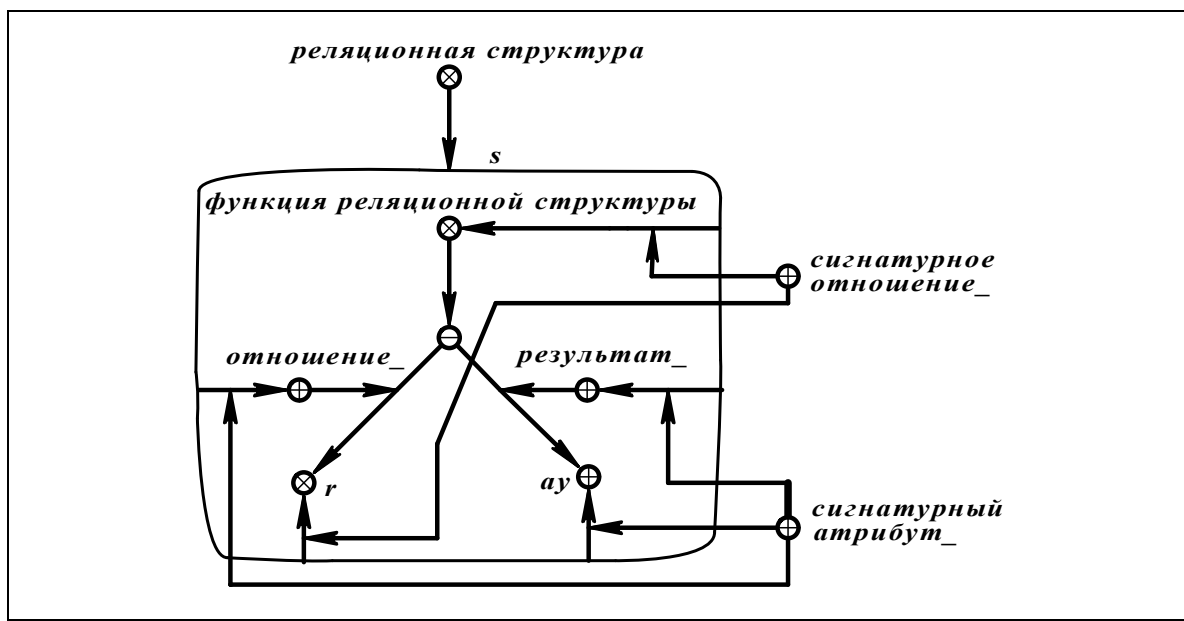
Примечание. Для уточнения роли некоторых компонентов реляционной структуры могут использоваться и другие атрибуты.

В общем случае не все элементы сигнатурного множества реляционной структуры должны быть элементами этой реляционной структуры. Следовательно, каждому сигнатурному множеству реляционной структуры ставится в соответствие его подмножество, состоящее из всех тех и только тех элементов сигнатурного множества, которые являются элементами реляционной структуры (чаще всего первичными элементами). Указанное подмножество будем называть **определяющим подмножеством сигнатурного множества** реляционной структуры.

В общем случае не все связки сигнатурного отношения реляционной структуры должны быть элементами этой реляционной структуры. Следовательно, каждому сигнатурному отношению реляционной структуры ставится в соответствие его подмножество, в состав которого входят все те и только те связки этого отношения, которые являются подмножествами этой реляционной структуры. Указанное подмножество сигнатурного отношения будем называть **определяющим подмножеством сигнатурного отношения** реляционной структуры.

Для уточнения вида **определяющих подмножеств сигнатурных отношений** реляционной структуры вводятся специальные сигнатурные метаотношения, используемые для указания роли компонентов реляционной структуры. К числу таких специальных сигнатурных отношений относятся метаотношение **“функция реляционной структуры”** и метаотношение **“алгебраическая операция реляционной структуры”**. Особо подчеркнем то, что указанные понятия ставятся в соответствие не самим сигнатурным отношениям, а их определяющим подмножествам в рамках указываемых реляционных структур. Поэтому эти понятия являются не абсолютными, а относительными для этих реляционных структур. Другими словами некоторое сигнатурное отношение некоторой реляционной структуры в целом может не быть функциональным, а его определяющее подмножество для указанной реляционной структуры может оказаться функциональным и наоборот.

Определение 3.4.1.2. Определение метаотношения **“функция реляционной структуры”**. Сигнатурное отношение r реляционной структуры s будем называть **функциональным отношением** этой реляционной структуры в том и только в том случае, если определяющему подмножеству указанного сигнатурного отношения указанной реляционной структуры соответствует некоторая функциональная зависимость, являющаяся функцией с атрибутом результата au (см. [пункт 3.3.5](#)). В этом случае справедлива конструкция вида:



Примечание. Указание того, какая именно функциональная зависимость (а их может быть несколько) указываемого сигнатурного отношения нас интересует в рамках указываемой реляционной структуры, осуществляется с помощью специальных дополнительных атрибутов, вводимых в состав реляционной структуры, — атрибута **“результат_”**, атрибута **“отношение_”**. Указанные знаки атрибутов включаются в число элементов реляционной структуры (такие элементы реляционной структуры отмечаются атрибутом **“сигнатурный атрибут_”**). Эти атрибуты следует отличать от атрибутов, которыми отмечаются элементы реляционной структуры, т.е. указываются роли этих элементов в рамках реляционной структуры. К числу последних относятся: **“первичный элемент_”**, **“сигнатурное множество_”**, **“сигнатурное отношение_”**, **“сигнатурный атрибут_”**.

Определение метаотношения **“алгебраическая операция реляционной структуры”** (быть алгебраической операцией реляционной структуры) строится точно так же, как и определение метаотношения **“функция реляционной структуры”**.

Примечание. Следует отличать абсолютное понятие **“функция”** (см. [пункт 3.3.5](#)) от относительного понятия **“функция реляционной структуры”** (быть функцией данной реляционной структуры). Аналогично этому

следует отличать понятие “*алгебраическая операция*” и понятие “*алгебраическая операция реляционной структуры*”.

Упражнения к пункту 3.4.1.

Упражнение 3.4.1.1. Согласно данному выше строгому определению реляционной структуры, могут ли первичные элементы реляционной структуры быть одновременно вторичными элементами реляционной структуры?

Упражнение 3.4.1.2. Может ли первичный элемент реляционной структуры быть:

- знаком атрибута в кортежах, знаки которых являются вторичными элементами реляционной структуры;
- знаком сигнатурного отношения реляционной структуры;
- знаком сигнатурного множества реляционной структуры?

3.4.2. Типология реляционных структур

Ключевые понятия: алгебра, решетка, поле, кольцо, группа, алгебраическая модель, алгебраическая система.

Проведем типологию реляционных структур (см. также пункт 1.2.1). В соответствии с приведённым выше определением реляционной структуры, реляционные структуры можно разбить на два класса:

- неклассические реляционные структуры,
- классические реляционные структуры.

Особый класс реляционных структур – иерархические реляционные структуры.

Среди классических реляционных структур можно проследить следующую типологию:

- алгебраические системы,
 - алгебры,
 - алгебраическая структура с бинарными операциями (алгебраическая структура, каждая операция которой соответствует некоторому тернарному отношению)
 - алгебраическая структура с одной бинарной операцией
 - группоид
 - группоид с нейтральным элементом;
 - группоид без нейтрального элемента;
 - полугруппа
 - коммутативная полугруппа;
 - некоммутативная полугруппа;
 - полугруппа с правым сокращением;
 - полугруппа с двухсторонним сокращением;
 - группа
 - коммутативная группа (абелева группа);
 - алгебраическая структура с двумя бинарными операциями
 - кольцо
 - тело
 - поле;
 - решетка
 - дедекиндова решетка (модулярная решетка)
 - дистрибутивная решетка;
 - алгебраические модели
 - графовые структуры.

Упражнения к пункту 3.4.2.

Упражнение 3.4.2.1. Является ли алгебраическая система классической реляционной структурой?

У п р а ж н е н и е 3 . 4 . 2 . 2 . Могут ли в алгебраической структуре разным отношениям быть сопоставлены алгебраические операции различной ариности?

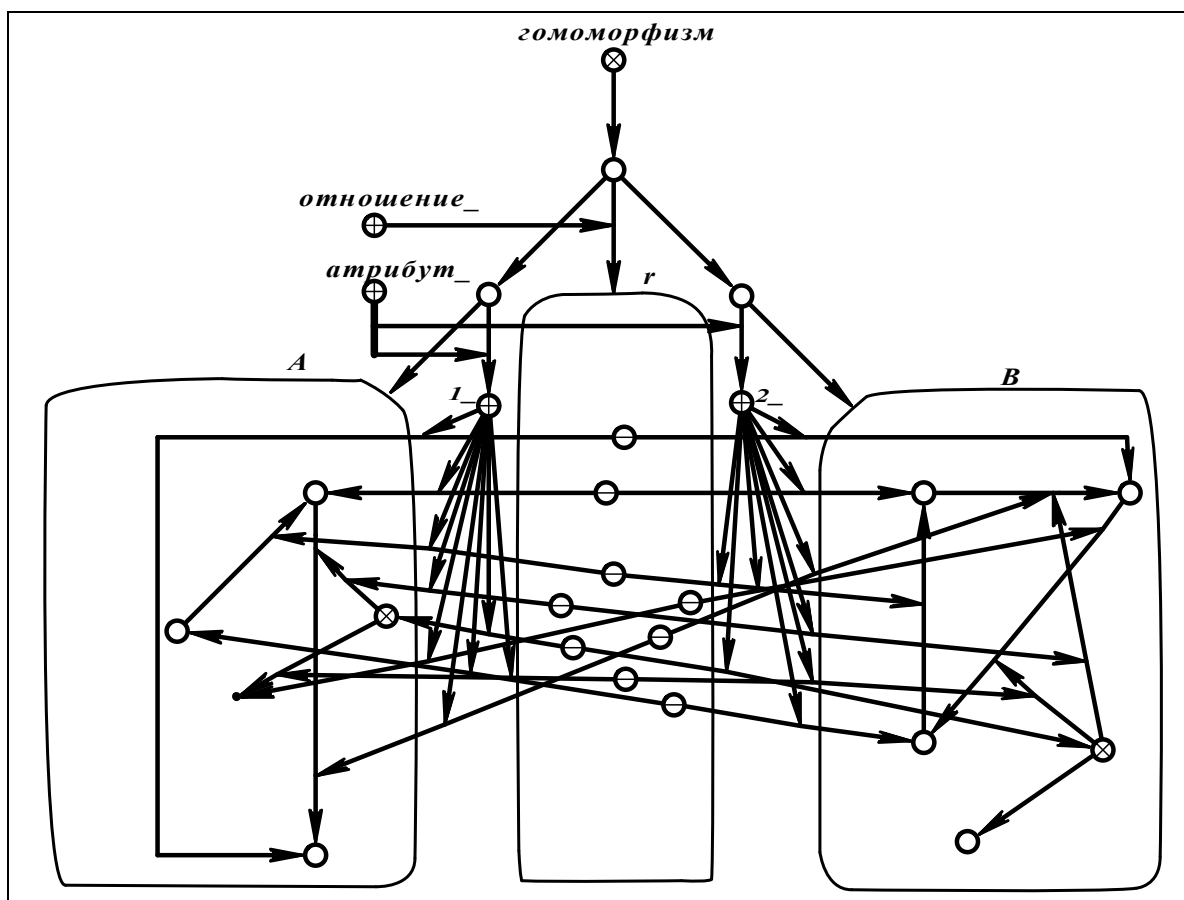
3.4.3. Отношения над реляционными структурами. Реляционные метаструктуры

Ключевые понятия и идентификаторы ключевых scb-узлов: реляционная метаструктура, гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм.

Основными отношениями над реляционными структурами являются:

- отношение гомоморфизма,
- отношение изоморфизма,
- отношение автоморфизма (частный вид отношения изоморфизма).

SCBg-текст 3.4.3.1. Пример отношения гомоморфизма:



В приведённом примере реляционная структура A гомоморфна реляционной структуре B при соответствии гомоморфизма, заданного отношением r .

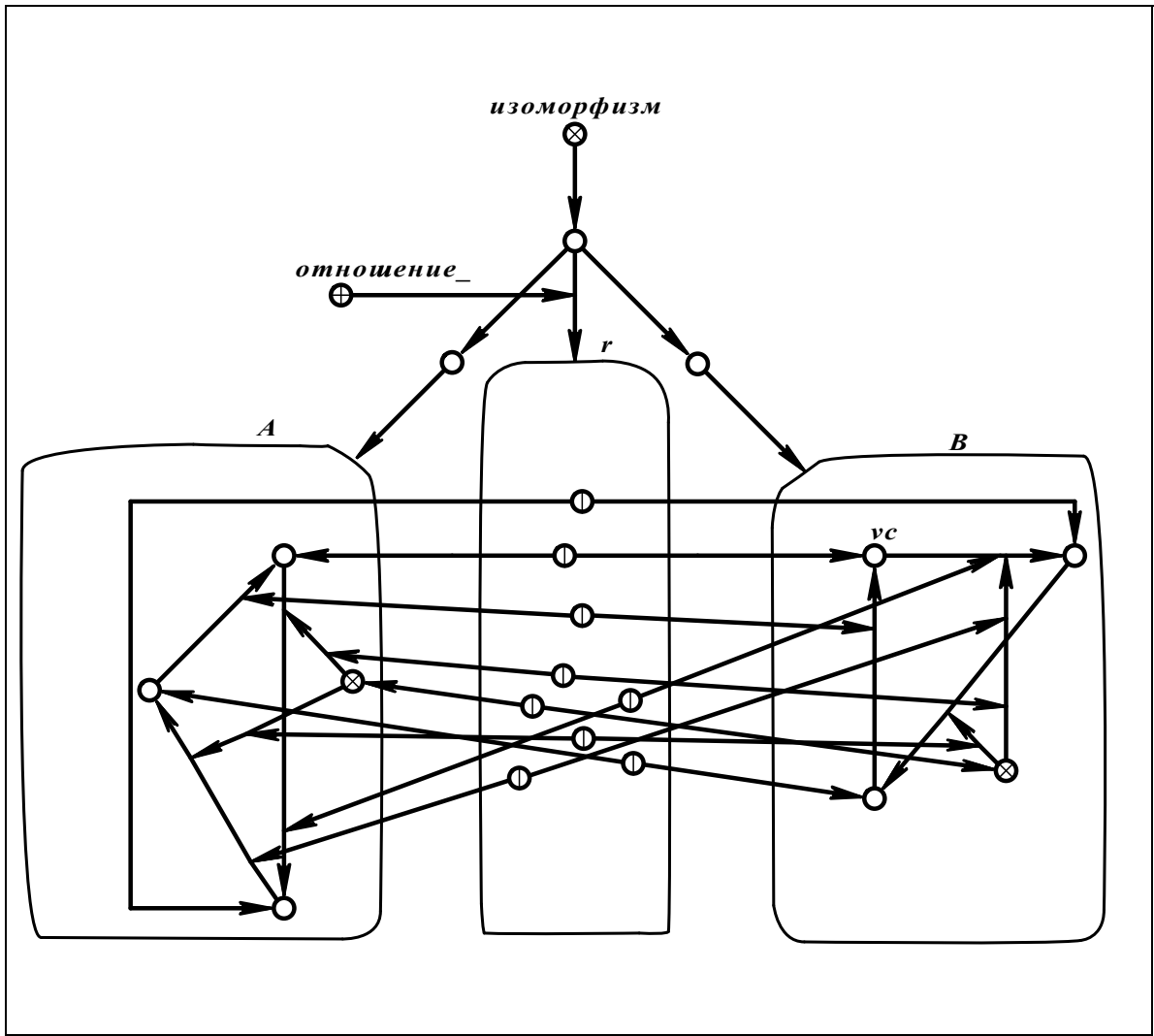
Реляционная структура A называется гомоморфной реляционной структуре B , тогда и только тогда, когда:

- 1) каждому первичному элементу реляционной структуры A однозначно соответствует первичный элемент структуры B ;
- 2) каждому сигнатурному множеству реляционной структуры A однозначно соответствует сигнатурное множество структуры B ;
- 3) каждому сигнатурному отношению реляционной структуры A однозначно соответствует сигнатурное отношение структуры B ;
- 4) каждому сигнатурному атрибуту реляционной структуры A однозначно соответствует сигнатурный атрибут структуры B ;
- 5) кроме того: если элемент e структуры A включён во множество s в рамках этой структуры, т. е. существует дуга $(s !; e)$, то однозначно соответствующий ему элемент e^* реляционной структуры B ,

должен быть включён во множество s^* , включённое в реляционную структуру B , причём s^* – элемент, однозначно соответствующий элементу s в рамках рассматриваемого отношения гомоморфизма, а также дуга $(s^* !; e^*)$ включена в реляционную структуру B и также является элементом, однозначно соответствующим дуге $(s !; e)$ в рамках рассматриваемого отношения гомоморфизма.

Реляционные структуры A и B называются изоморфными тогда и только тогда, когда реляционная структура A гомоморфна структуре B и реляционная структура B гомоморфна структуре A .

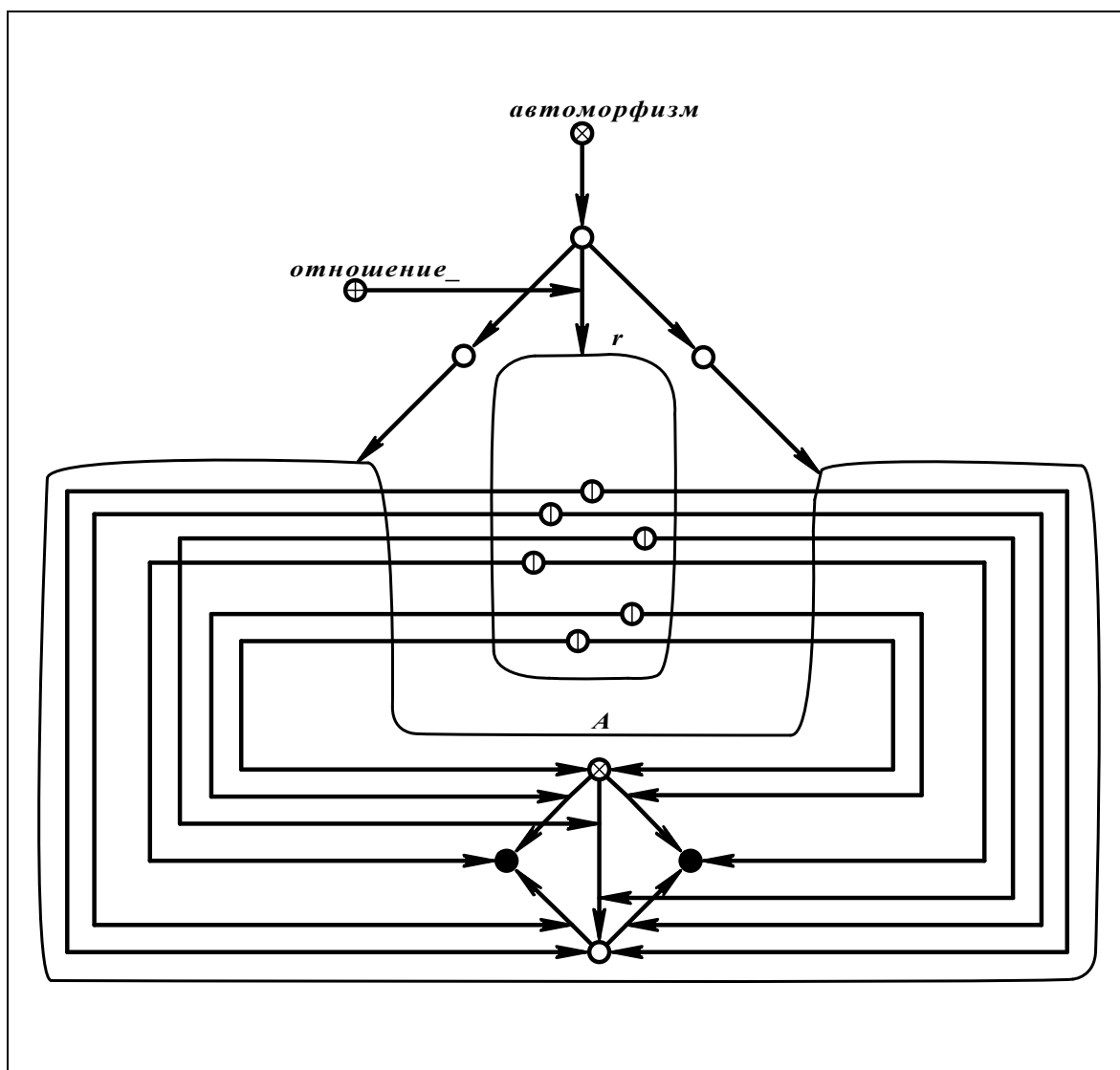
SCBg-текст 3.4.3.2. Пример отношения изоморфизма



В приведённом примере реляционная структура A изоморфна реляционной структуре B при соответствии изоморфизма, заданного отношением r .

Частным случаем изоморфизма является автоморфизм, когда реляционная структура изоморфна сама себе. Выделив отношения гомоморфизма и изоморфизма, можно перейти к рассмотрению реляционных метаструктур, т.е. таких реляционных структур, в которых вышеперечисленные отношения играют роль сигнатурных, а первичными элементами являются реляционные структуры.

SCBg-текст 3.4.3.3. Пример отношения автоморфизма

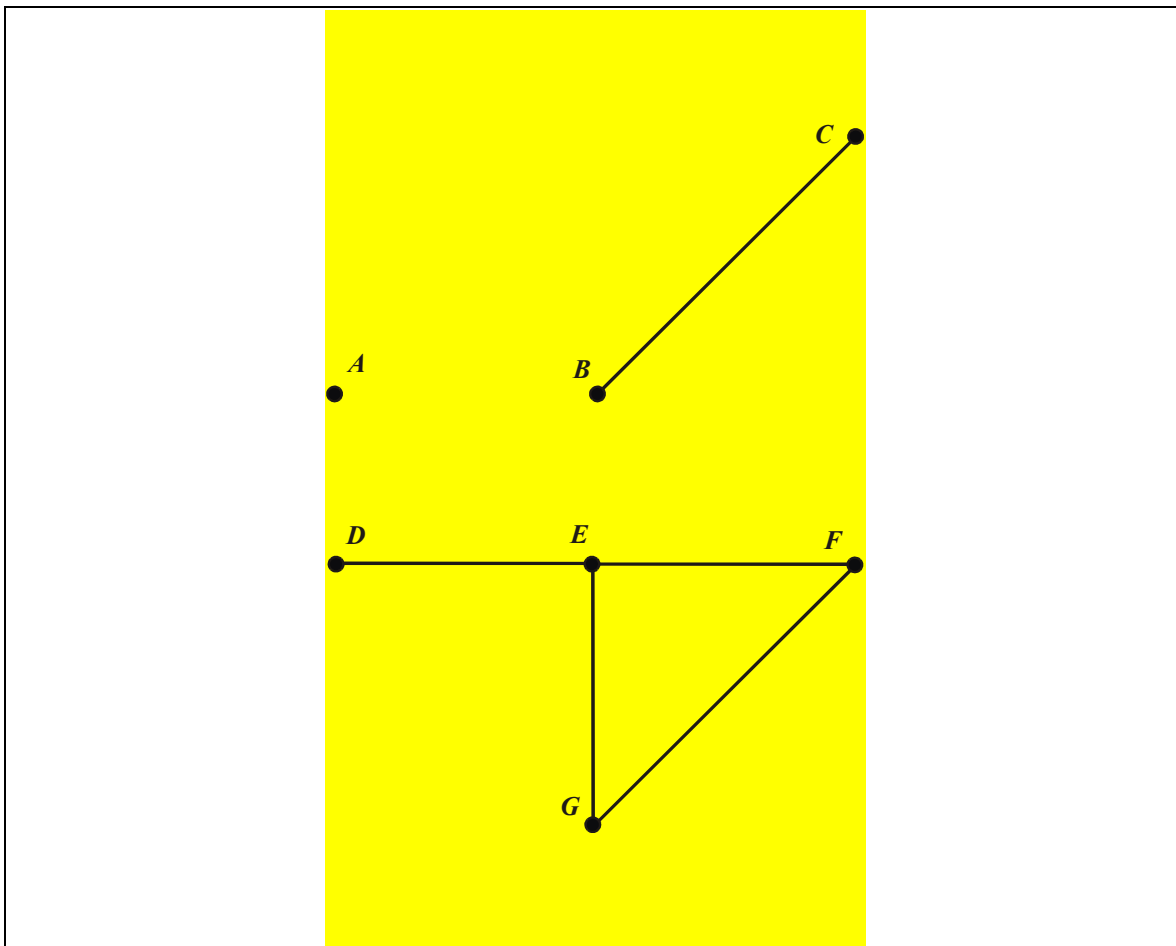


В приведённом примере реляционная структура A автоморфна при соответствии автоморфизма, заданного отношением r .

3.4.4. Графовые структуры и отношения над ними

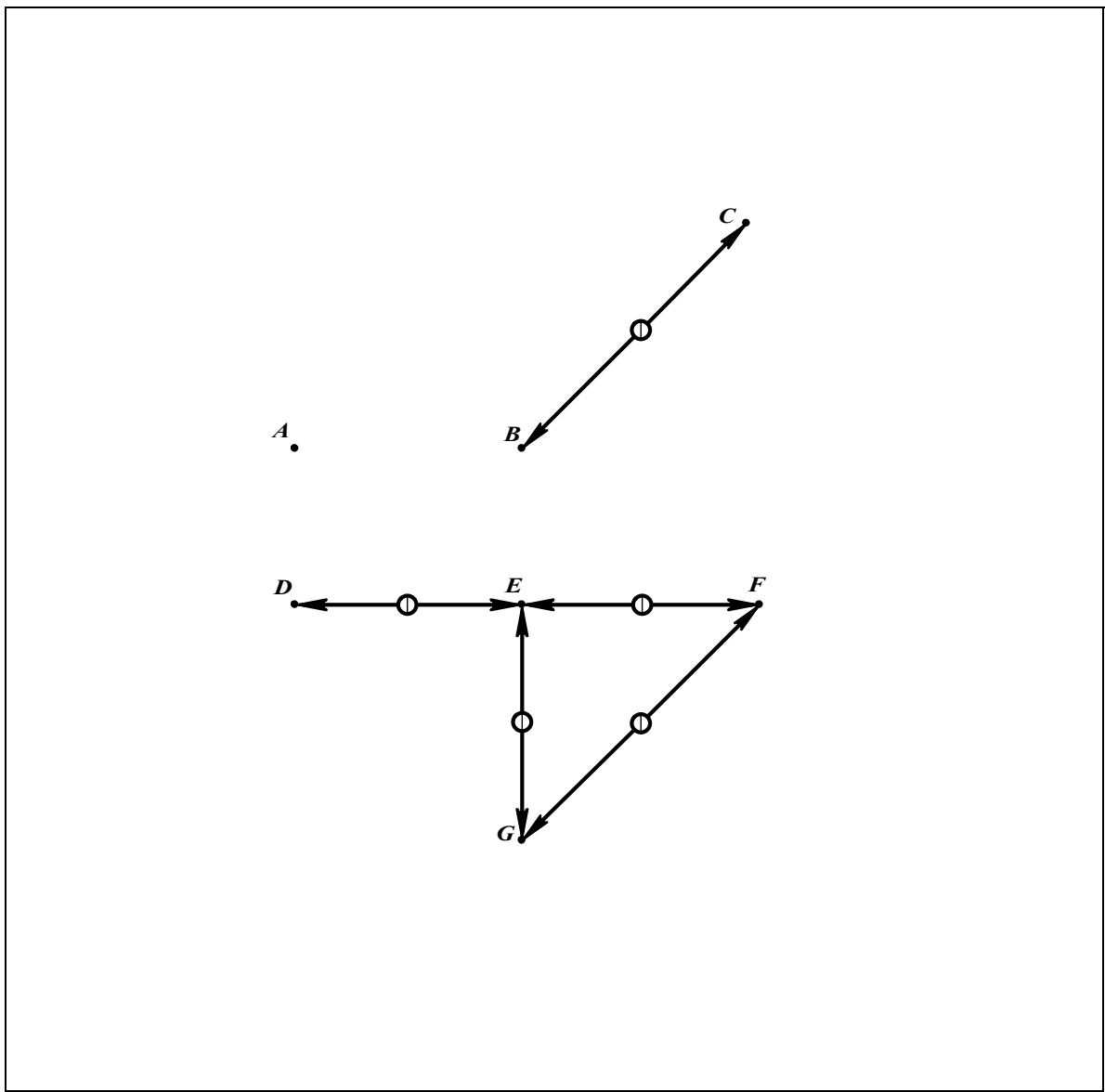
Ключевые понятия: графовая структура, связка инцидентности, ребро, вершина.

Графовая структура (граф) – реляционная структура, в которой все сигнатурные отношения являются бинарными (ориентированными либо неориентированными) отношениями смежности (см. [подраздел 1.2](#)). Связки этих отношений называют рёбрами графа. Первичные элементы графа называют вершинами. Приведём пример графовой структуры неориентированного графа в традиционном представлении:



При представлении графа на языке SCB каждое неориентированное ребро графа представляется неориентированной бинарной связкой, а каждое ориентированное – ориентированной связкой.

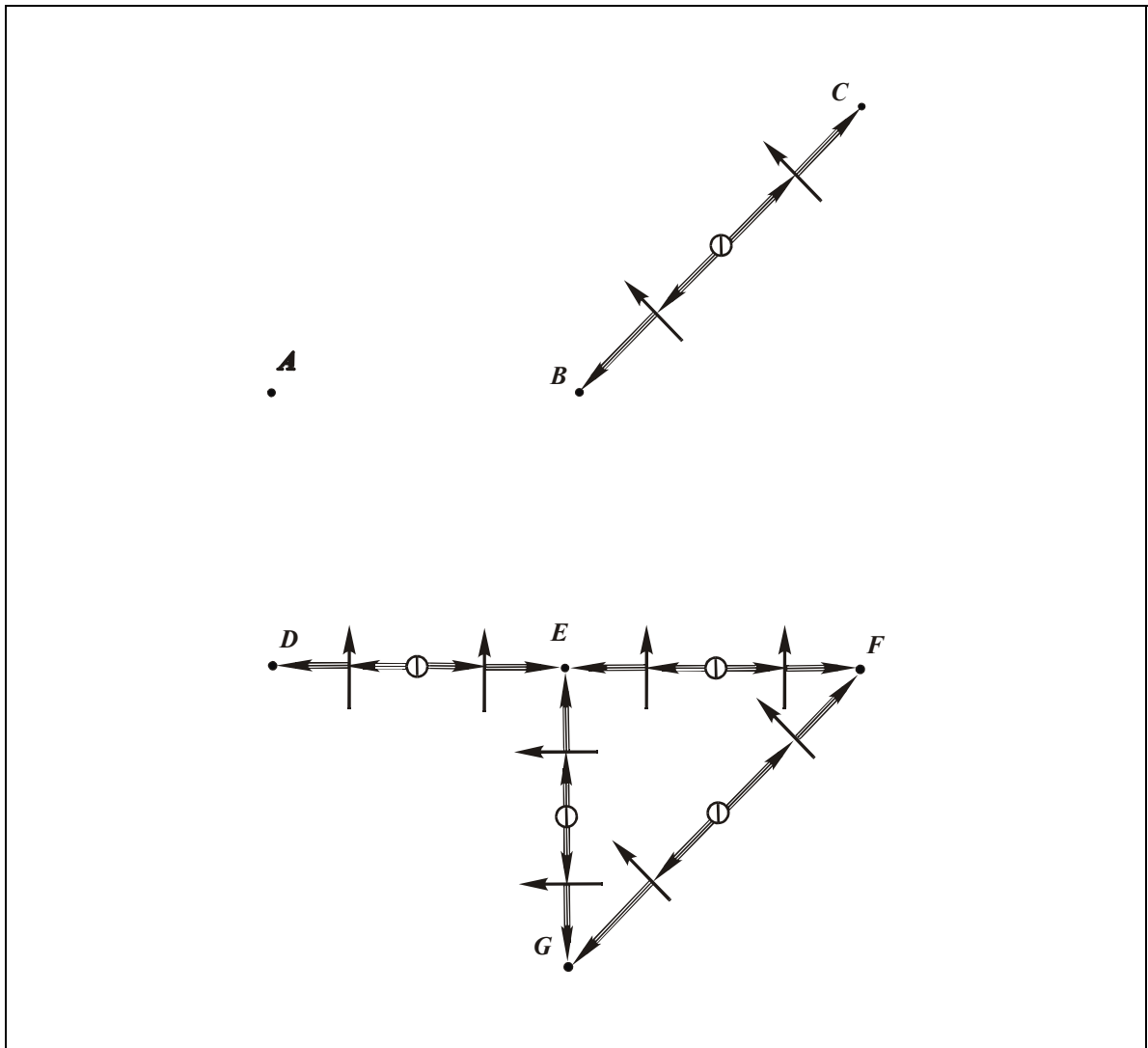
SCBg-текст 3.4.4.1. Представление вышеприведённого графа на языке SCB:



Введём в графическую модификацию языка SCB изображение связки отношения инцидентности:



Используя связки отношения инцидентности, можно рассматриваемую нами графовую структуру представить и таким образом:



Над графовыми структурами, так же как и над реляционными структурами, определены отношения гомоморфизма, изоморфизма и автоморфизма.

Существует типология графовых структур (графов):

- ориентированные графы,
 - неориентированные графы,
 - смешанные графы;
-
- связные графы,
 - несвязные графы;
-
- циклические графы,
 - ациклические графы
 - деревья
 - бинарные деревья,
 - тернарные деревья
 - и т.п.

Выводы к разделу 3

Завершая раздел 3, подчеркнем, что на языке SCB возможно эффективное представление не только классических, но и неклассических математических структур – не только канторовских множеств, но и мультимножеств (множеств с повторениями), не только классических кортежей, но и кортежей неклассического вида с произвольным характером распределения атрибутов между компонентами кортежа, не только классических отношений, каждое из которых представляет собой множество классических кортежей одинаковой мощности и с одинаковыми атрибутами, но и отношений неклассического вида, не только классических реляционных структур (алгебраических систем), но и реляционных структур неклассического вида.

Особо отметим неограниченные возможности языка SCB для представления всевозможных метаструктур – метамножеств (множеств, элементами которых являются множества), метакортежей (кортежей, компонентами которых являются кортежи), метаотношений (отношений, в область определения которых входят отношения), реляционных метаструктур (реляционных структур, первичными и/или вторичными элементами которых являются знаки реляционных структур).