5. Представление логических формул и формальных теорий в памяти графодинамических ассоциативных машин

Трактовка атомарных логических формул как множеств , элементами которых являются элементарные составляющие логических формул (константы и переменные), явное введение знаков для всех логических формул, входящих в состав логического текста, и, наконец, трактовка неатомарных (сложных) логических формул как множеств, элементами которых являются знаки логических формул, которые входят в состав этих неатомарных логических формул, – все это позволяет использовать фактографический язык SCB для представления логических формул и для описания соотношений между ними. Единственная особенность такого использования языка SCB заключается в том, что здесь приходится иметь дело не только с множествами, элементами которых являются знаки множеств (т.е. нормализованными множествами), но и с множествами, среди элементов которых встречаются переменные, которые, строго говоря, знаками множеств не являются.

Логические языки, построенные на базе языка SCB на основе указанных выше принципов, с полным основанием можно считать логическими языками теоретико-множественного или реляционного типа, т.е. языками, в основе которых лежит теоретико-множественный способ трактовки структуры логических формул. Рассмотрим один из вариантов такого логического языка. Назовем его SCL (Semantic Code Logic).

Данный раздел может быть использован в качестве учебного пособия по дисциплинам «Математические основы искусственного интеллекта» и «Логические основы интеллектуальных систем» для студентов специальности «Искусственный интеллект».

5.1. Принципы построения графового логического языка SCL (Semantic Code Logic) на теоретико-множественной основе

В данном подразделе рассматриваются специальные отношения и атрибуты, обеспечивающие представление в языке SCL неатомарных логических формул и формальных теорий. Неатомарная логическая формула в языке SCL трактуется как неориентированное множество или кортеж (ориентированное множество), в состав которого входят знаки логических формул, из которых состоит эта неатомарная логическая формула. Таким образом, для записи неатомарных логических формул вполне можно использовать фактографический язык SCB. В этом и заключается суть языка SCL. Система ключевых понятий, а следовательно, система ключевых узлов и синтаксис языка SCL не является единственно возможным способом построения логического языка на базе языка SCB.

Формальный логический язык SCL построен на базе языка SC как его подъязык путем фиксации определенного набора специальных ключевых узлов, т.е. узлов, семантика которых должна быть априори известна и согласована. Перечислим основные ключевые узлы языка SCL:
***atExpr*, *conj*, *disj*, *alt*, *impl*, *if_*, *then_*, *eqExpr*, *negExpr*, *fuzExpr*, *pwFuzExpr*, *exist*, *fix_*, *pwExist*, *all*, *existAtExpr*, *allImpl*, *allEqExpr*, *theory*, *union_*.**

Каждая логическая формула (как атомарная, так и неатомарная) входит (в качестве компонента) в состав какой-либо формулы. В конечном счете такой неатомарной логической формулой является сама формальная теория, трактуемая как априори истинное конъюнктивное высказывание, т.е. как множество истинных высказываний различного вида. Тип логической формулы задается ключевым множеством, которое содержит все формулы такого типа. Здесь следует выделить группы таких ключевых множеств:

- Первая группа множеств, определяющих тип логической формулы, разбивает логические формулы по их структурному виду соответственно, включает себя следующие множества:
  - множество атомарных логических формул, которое будем обозначать ключевым узлом "***atExpr***" (быть атомарной логической формулой, каждая из которых представляет собой множество, состоящее из (1) знаков узловых множеств, (2) знаков пар принадлежности, (3) переменных, значениями которых являются знаки узловых множеств, (4) переменных, значениями которых являются знаки пар принадлежности, (5) метапеременных (если логическая формула относится к метатеории);
  - множество конъюнктивных логических формул, которое будем обозначать ключевым узлом "***conj***" (быть конъюнктивной формулой);

  - множество дизъюнктивных формул, которое будем обозначать ключевым узлом ***“disj”*** (быть нестрогой дизъюнктивной формулой);
  - множество альтернативных формул, которое будем обозначать ключевым узлом ***“alt”*** (быть строгой дизъюнктивной формулой – логической формулой исключающего ИЛИ);
  - множество импликативных формул, которое будем обозначать ключевым узлом ***“impl”*** ;
  - множество логических формул об эквивалентности, которое будем обозначать ключевым узлом ***“eqExpr”*** ;
  - множество негативных логических формул, каждая из которых трактуется как 1-мощное множество (синглитон), элементом которого является отрицаемая логическая формула (т.е. формула, на которую действует логическое отрицание). Множество негативных логических формул обозначается ключевым узлом ***“negExpr”*** .
- Вторая группа множеств используется для определения типа кванторных логических формул и соответственно включает в себя следующие множества:
  - множество формул о существовании, которое будем обозначать ключевым узлом ***“exist”*** ;
  - множество формул о всеобщности, которое будем обозначать ключевым узлом ***“all”*** .

Кроме множеств, указывающих тип самой логической формулы, введем атрибуты, указывающие роль формулы, входящей в состав неатомарной формулы, представляющей собой кортеж из знаков других логических формул. К таким атрибутам относятся:

- ***“if_”*** (быть посылкой импликативной логической формулы);
- ***“then_”*** (быть следствием импликативной логической формулы);
- ***“fix_ ”*** (быть множеством фиксируемых элементов, т.е. тех переменных, которые связываются каким-либо квантором в рамках кванторной формулы – при этом в это множество разрешается включать уже выше зафиксированные, т.е. уже связанные переменные и даже константы).

Специальным видом неатомарных формул являются формальные теории. Формальная теория задается путем причисления ее знака ко множеству с именем (идентификатором) ***“theory”***, которое представляет собой множество знаков всевозможных формальных теорий. А поскольку каждая формальная теория есть кортеж, множество ***theory*** можно трактовать как ориентированное отношение. В состав формальной теории обязательно входит знак описываемой этой теорией реляционной структуры под атрибутом ***“union_”.***

5.2. Запись логических формул с использованием стилизованного естественного языка

Для записи логических формул на языке, близком к естественному, будем использовать такие варианты (шаблоны) этих формулировок, от которых легко можно перейти к формальному логическому языку. Заметим, что в этих шаблонах используются тексты языка SCg или языка SCs для записи атомарных логических формул. А сам стилизованный естественный язык используется для представления семантической структуры изображаемых (записываемых) неатомарных логических формул. Перечислим эти шаблоны.

Здесь прямоугольниками обозначаются тексты, построенные по одному из перечисленных шаблонов и представляющие собой запись различных логических формул.

Имеет место **к о н ъ ю н к ц и я** следующих формул:
-
-

/* Запись конъюнктивной формулы */

Имеет место **дизъюнкция** следующих формул:
-
-

/* Запись дизъюнктивной формулы */

Имеет место **строгая дизъюнкция** следующих формул:
-
-

/* Запись строгой дизъюнктивной формулы */

Имеет место **эквивалентность** следующих формул:
-
-

/* Запись формулы об эквивалентности */

Имеет место **импликация** следующих формул:
- **если**
- **то**

/* Запись импликативной формулы */

Существует конструкция вида:
[< *атомарная формула* > **] ;**

/* Запись формулы о существовании, в которой квантор существования действует на атомарную формулу */

Существует конструкция вида:
[< *атомарная формула* > **] ;**
у которой:

/* Запись формулы о существовании, в которой квантор существования действует на неатомарную формулу */

Для всех значений переменных:
[< *атомарная формула* > **] ;**

/* Запись формулы о всеобщности */

Преобразование перечисленных вариантов записи позитивных логических формул в негативные осуществляется добавлением в самом начале текста отрицания **“не”**.

Одной из наиболее часто используемых логических формул об эквивалентности является определение, которые выглядят следующим образом:

Имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих формул:

- **С у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [$\_x$ $\prec\!\!\prec\!\!-$ s **;] ;**
- $\boxed{}$

/* Запись определения множества с именем "s" */

Здесь прямоугольником изображается текст, являющийся формулировкой критерия, которому должны удовлетворять все элементы определяемого множества и только они, т.е. формулировкой критерия принадлежности произвольного элемента $\_x$ определяемому множеству s.

5.3. Язык SCLs (Semantic Code Logic string) – формальный линейный логический язык классического типа, использующий язык SCs для записи атомарных логических формул

Логический язык SCL является языком теоретико-множественного типа, в основе которого лежит трактовка логических связок и кванторов через понятия множества, кортежа, атрибута, отношения, т.е. трактовка формальных теорий и неатомарных логических формул как реляционных структур над высказываниями.

Язык SCL является подъязыком языка SC и имеет две модификации:

- линейную модификацию – язык SCLs (Semantic Code Logic string);
- графическую модификацию – язык SCLg (Semantic Code Logic graphical).

Основное отличие языка SCLs от классического логического языка заключается в способе записи атомарных логических формул. Атомарная логическая формула в языке SCLs – это текст языка SCs, ограниченный квадратными скобками. Неатомарные (сложные) логические формулы в языке SCLs строятся точно так же, как и в классическом логическом языке.

Если bi и bj есть scls-формулы, а переменная xi является свободной переменной логической формулы bi, то логическими формулами также являются конструкции вида:

($\neg\, bi$**)**	–	логическая формула, являющаяся отрицанием формулы bi;
(bi & bj**)**	–	конъюнктивная формула, являющаяся конъюнкцией формул bi и bj ;
($bi \vee bj$**)**	–	дизъюнктивная формула;
(bi | bj**)**	–	строгая дизъюнктивная формула;
($bi \longrightarrow bj$**)**	–	импликативная формула;
($bi \Longleftrightarrow bj$**)**	–	логическая формула об эквивалентности;
($\exists xi\ bi$**)**	–	логическая формула о существовании;
($\exists !xi\ bi$**)**	–	логическая формула о существовании и единственности;
($\exists n / xi\ bi$**)**	–	логическая формула о существовании n значений xi, удовлетворяющих формуле bi;
($\exists > n / xi\ bi$**)**	–	логическая формула о существовании более чем n значений xi, удовлетворяющих формуле bi;
($\exists \geqslant n / xi\ bi$**)**	–	логическая формула о существовании не менее чем n значений xi, удовлетворяющих формуле bi;

$(\exists < n / xi\ bi)$ – логическая формула о существовании менее чем n значений xi, удовлетворяющих формуле bi;

$(\exists \leqslant n / xi\ bi)$ – логическая формула о существовании менее чем n значений xi, удовлетворяющих формуле bi;

$(\exists / n_1, n_2 / xi\ bi)$ – логическая формула о существовании n значений переменной xi, удовлетворяющих формуле bi, где $n_1 \leq n \leq n_2$;

$(\exists / n_1 <, n_2 / xi\ bi)$ – логическая формула о существовании n значений переменной xi, удовлетворяющих формуле bi, где $n_1 < n \leq n_2$;

$(\exists / n_1 <, < n_2 / xi\ bi)$ – логическая формула о существовании n значений переменной xi, удовлетворяющих формуле bi, где $n_1 < n < n_2$;

$(\exists / n_1, < n_2 / xi\ bi)$ – логическая формула о существовании n значений переменной xi, удовлетворяющих формуле bi, где $n_1 \leq n < n_2$;

$(\forall xi\ bi)$ – логическая формула о всеобщности, т.е. о том, что каждое значение переменной xi удовлетворяет формуле, т.е. "превращает" эту логическую формулу в истинное высказывание после соответствующей подстановки.

Приведем в табл. 5.3.1. перечень разделителей языка SCLs, которые используются для записи неатомарных высказываний.

Таблица 5.3.1. Специальные разделители логического языка SCLs

Разделитель	Комментарий
¬	символ логического отрицания
&	связка конъюнкции
∨	связка дизъюнкции
|	связка строгой дизъюнкции
—➢	связка импликации
⮘═➢	связка эквиваленции
∃	квантор существования
∃!	квантор существования и единственности
∀	квантор всеобщности
/	разделитель (ограничитель) диапазона в формулах существования определенного количества значений
⩽ ⩾	разделители, указывающие на включение границы диапазона
< >	разделители, указывающие на не включение границы диапазона
,	разделитель значений границ диапазона в формулах существования определенного количества значений

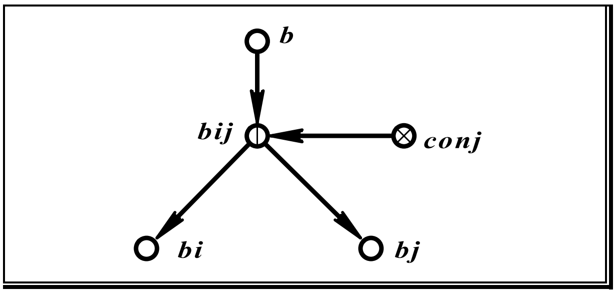
5.4. Язык SCLg (Semantic Code Logic graphical) – графический вариант изображения текстов языка SCL

Рассмотрим представление конкретных типов логических формул на языке SCLg путем "перевода" соответствующих scls-конструкций на язык SCLg (см. scl-тексты 5.4.1 – 5.4.6).

SCL-текст 5.4.1. Представление конъюнктивной логической формулы

$$bij = (bi \ \& \ bj);$$

$\Longleftrightarrow$



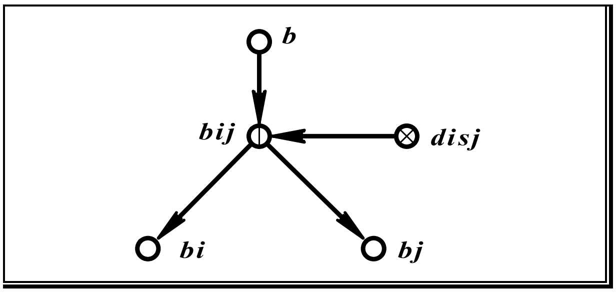
Здесь ***b*** есть неатомарная логическая формула дополнительно уточняемого вида, в состав которой формула ***bij*** непосредственно входит.

Примечание. В языке SCL допустимо существование вырожденных конъюнктивных логических формул, состоящих из одного компонента.

SCL-текст 5.4.2. Представление дизъюнктивной логической формулы

$$bij = (bi \vee bj);$$

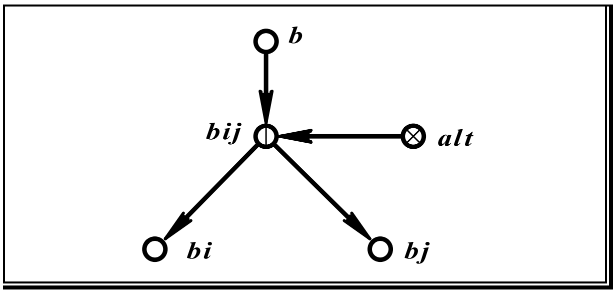
$\Longleftrightarrow$



SCL-текст 5.4.3. Представление альтернативной логической формулы

$$bij = (bi \mid bj);$$

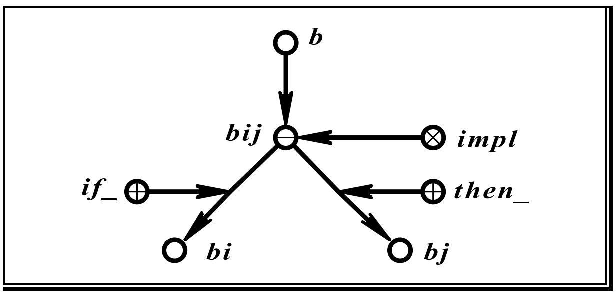
$\Longleftrightarrow$



SCL-текст 5.4.4. Представление импликативной логической формулы

$$bij = (bi \longrightarrow bj);$$

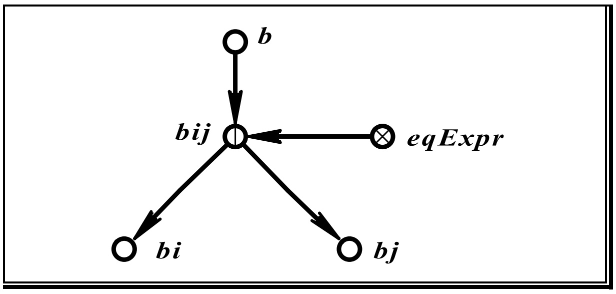
$\Longleftrightarrow$



SCL-текст 5.4.5. Представление логической формулы об эквивалентности

$bij = (bi \Leftrightarrow bj);$

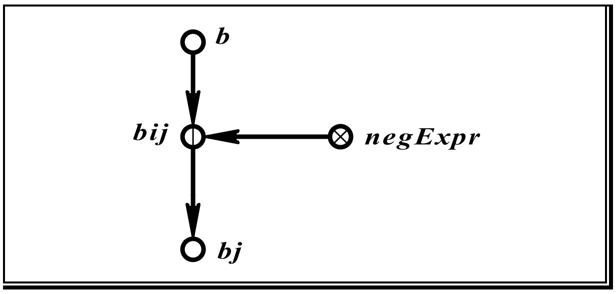
$\Leftrightarrow$



SCL-текст 5.4.6. Представление негативной логической формулы

$bi = (\neg\ bj);$

$\Leftrightarrow$

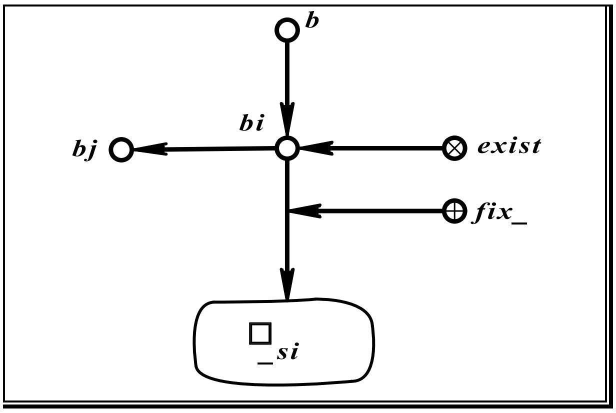


На нижеприведённых scl-текстах примеры записи кванторных логических формул.

SCL-текст 5.4.7. Представление формулы о существовании

$bi = (\exists\ \_si\ bj);$

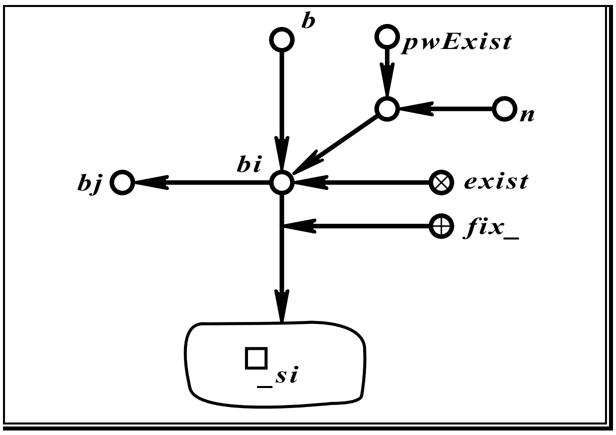
$\Leftrightarrow$



SCL-текст 5.4.8. Представление "числовой" формулы о существовании

$bi = (\exists\ n/\_si\ bj);$

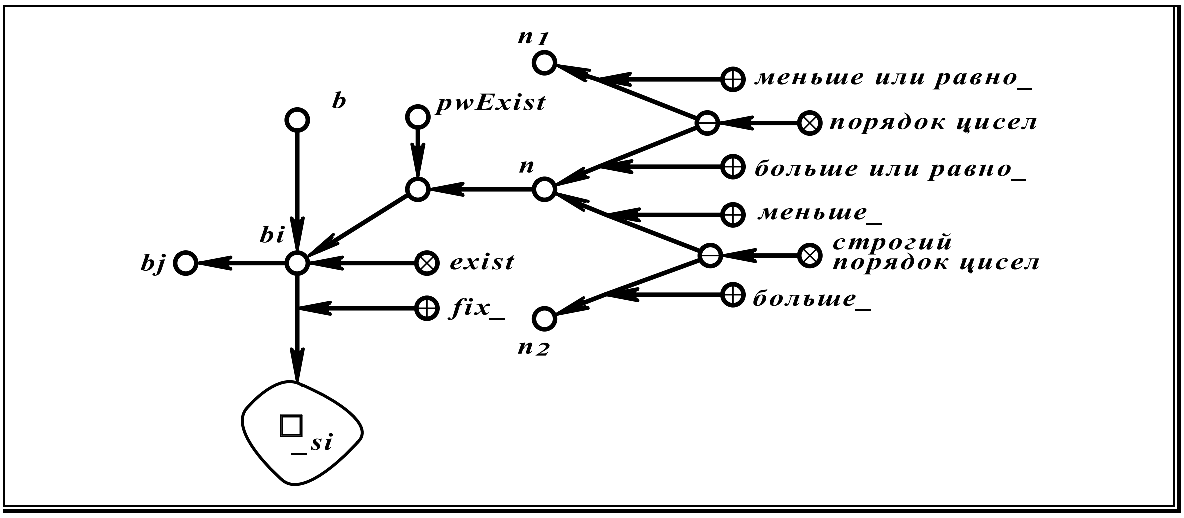
$\Leftrightarrow$



SCL-текст 5.4.9. Представление "числовой" формулы о существовании

$$bi = (\exists\ /\ n_1,\ \langle n_2 / \_si\ bj);$$

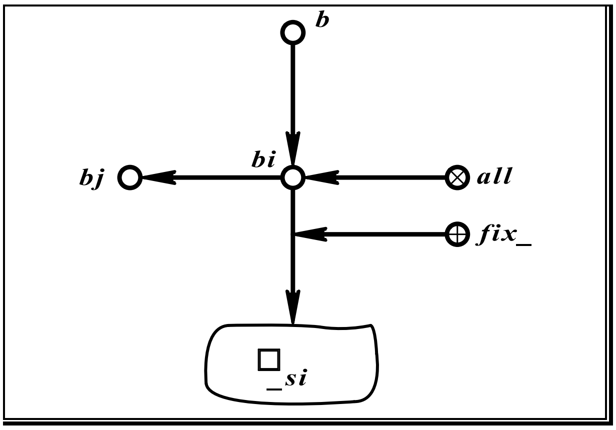
⇕



SCL-текст 5.4.10. Представление формулы о всеобщности

$$bi = (\forall\ \_si\ bj);$$

⇔

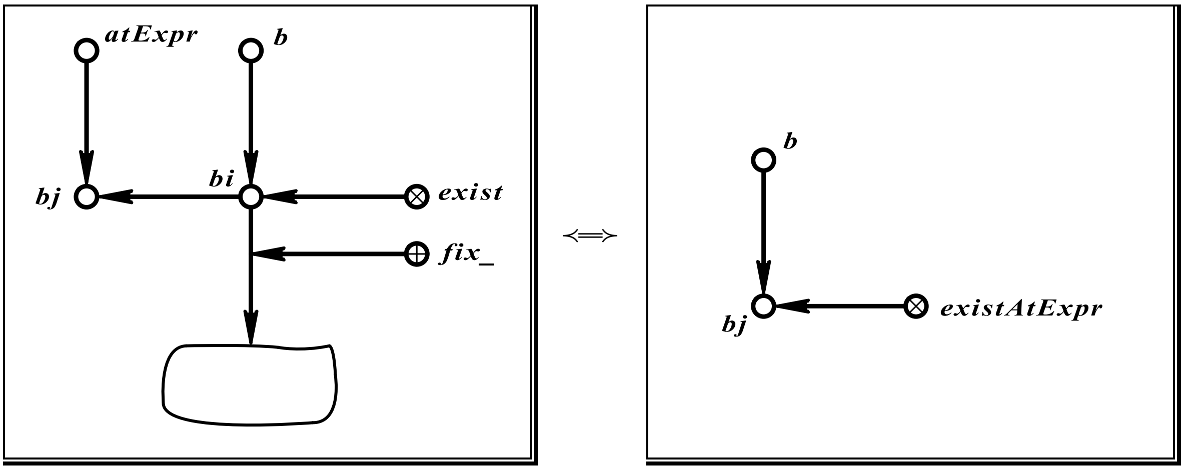


В случае, если квантор существования навешивается на атомарную формулу, а квантор всеобщности – на импликативную формулу, то для таких кванторных формул используется более лаконичный способ их записи и неявное указание связываемых переменных (см. scl-тексты 5.4.11 и 5.4.12).

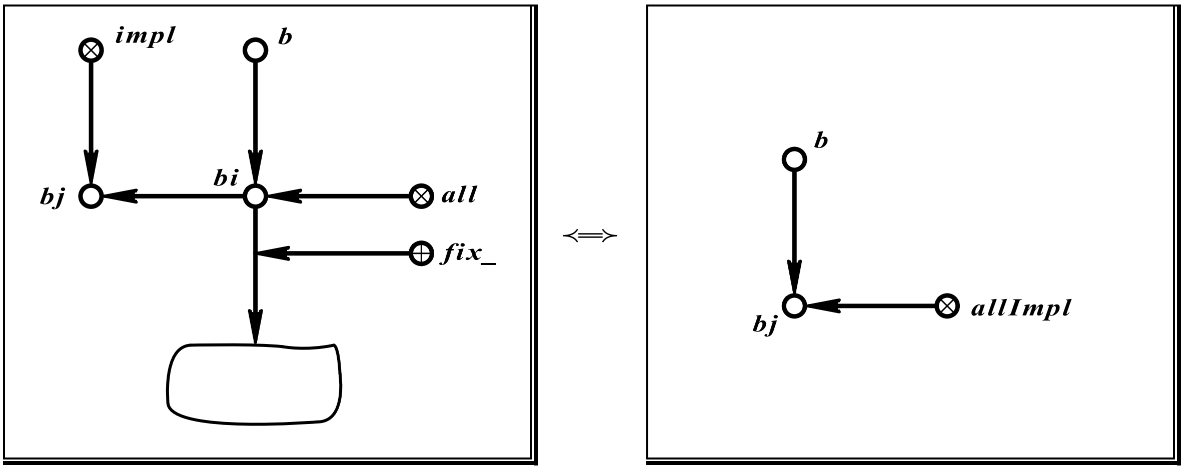
Правила неявного связывания переменных в кванторных формулах сводятся к следующему:

- переменные связываются сверху вниз (если какая-либо переменная связана в рамках некоторой кванторной формулы, то она считается связанной в рамках всех логических формул, которые входят в состав этой кванторной формулы);
- если формула ***bj*** отнесена к классу ***existAtExpr***, то эта формула трактуется как кванторная формула о существовании, в которой связываются все переменные, которые являются элементами множества ***bj*** и которые не были связаны выше;
- если формула (***bi*** —> ***bj***) отнесена к классу ***allImpl***, то эта формула трактуется как кванторная формула о всеобщности, в которой связываются все переменные, которые входят в состав как формулы ***bi***, так и формулы ***bj*** и которые не были связаны выше.

SCL-текст 5.4.11. Приведение к более лаконичному виду формулы о существовании



SCL-текст 5.4.12. Приведение к более лаконичному виду формулы о всеобщности



Примечание. Поскольку каждый текст языка SCLg является текстом языка SCg и соответственно языка SC и поскольку язык SC, кроме графического варианта изображения текстов (языка SCg), имеет также абсолютно эквивалентный ему символьный вариант (язык SCs), то от sclg-текстов достаточно легко перейти к их эквивалентному символьному представлению на языке SCs. При этом такое символьное представление логических высказываний не следует путать с рассмотренным выше языком SCLs, который является результатом компромисса между реляционным логическим языком SCL и логическими языками классического типа.

5.5. Примеры записи логических формул на предложенных логических языках

Приведём несколько примеров записи логических высказываний:

1) на естественном языке;
2) на стилизованном естественном языке по приведенным выше "шаблонам";
3) на языке SCLs, максимально приближенном к классическому логическому языку;
4) на графическом языке SCLg.

Пример 5.5.1. Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) каждое (всякое, любое) классическое отношение является ориентированным;
2) если x есть классическое отношение, то x является также и ориентированным отношением.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 . Запись на стилизованном естественном языке с применением языка SCs для записи структуры атомарных логических формул:

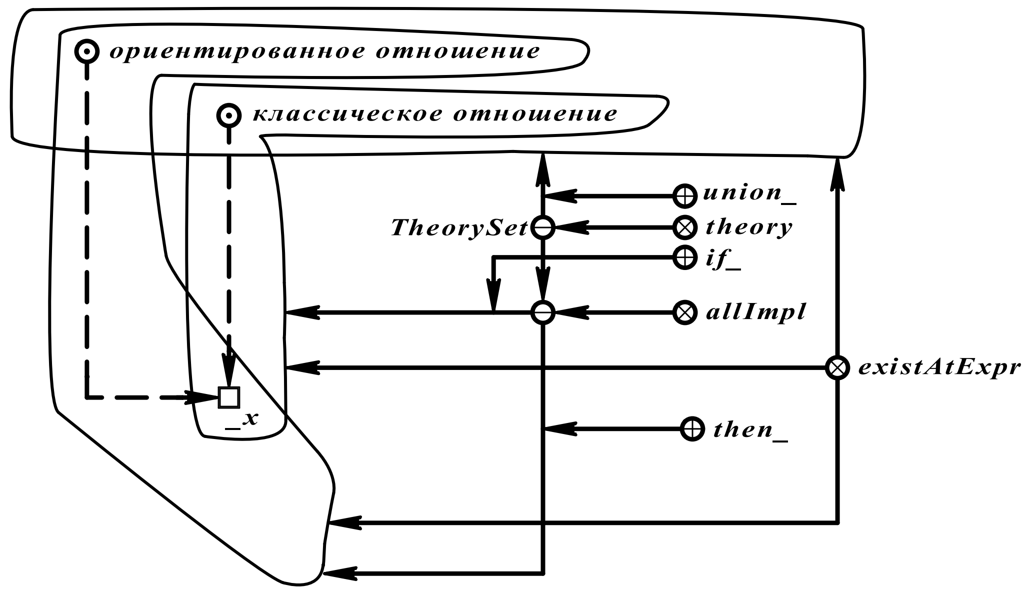
Для всех *_x* имеет место **и м п л и к а ц и я** следующих формул:

- **е с л и с у щ е с т в у е т [** *_x* ≺≺— *классическое отношение* **;] ,**
- **т о с у щ е с т в у е т [** *_x* ≺≺— *ориентированное отношение* **;] .**

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 . Запись на языке SCLs:

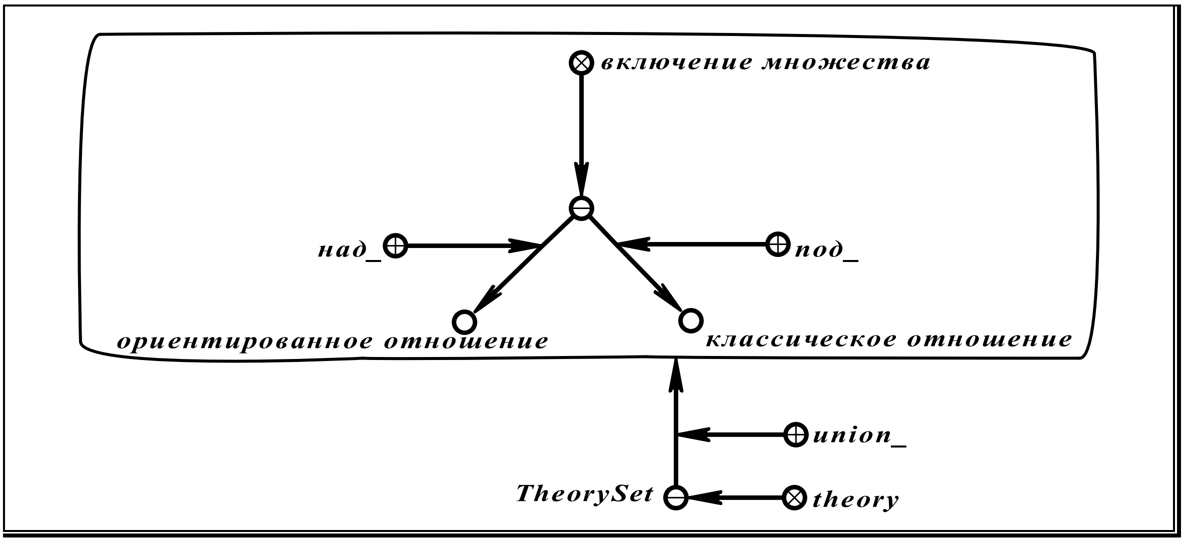
TheorySet —≻ ∀ *_x* **([** *_x* ≺— *классическое отношение* **;]** —➤
[*_x* ≺— *ориентированное отношение* **;]) ;**

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 . Запись на языке SCLg:



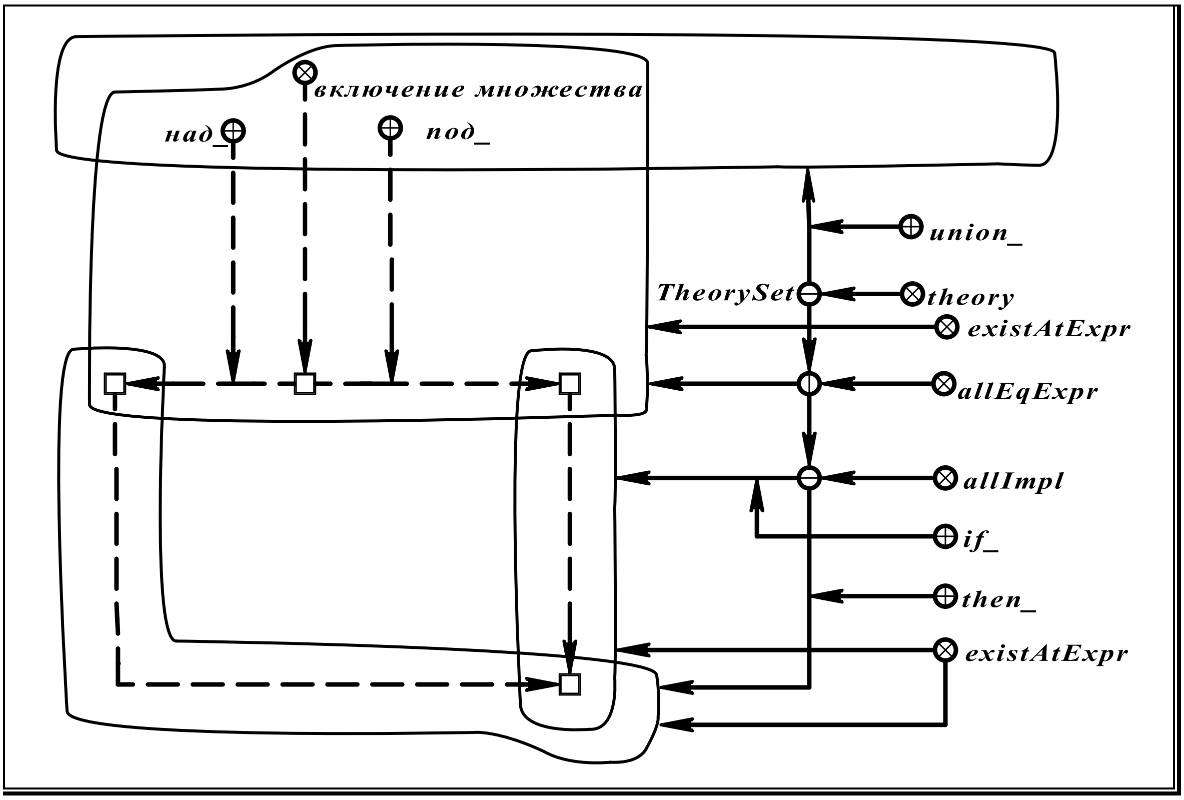
Пример 5.5.2. Высказывание, приведенное в примере 5.5.1, эквивалентно высказыванию о том, что множество "***классическое отношение***" является нестрогим подмножеством по отношению ко множеству "***ориентированное отношение***".

Продолжение примера 5.5.2. Запись на языке SCLg (см. также пункт 3.3.11):



Пример 5.5.3. Формальная запись высказывания, которое следует из определения понятия "***включение множества***" (см. пункт 3.3.11) и из которого следует эквивалентность высказывания, приведенного в примере 5.5.1, и высказывания, приведенного в примере 5.5.2.

Продолжение примера 5.5.3. Запись на языке SCLg:



Пример 5.5.4. Запись высказывания:
Не существует ни одного классического отношения, не являющегося ориентированным.

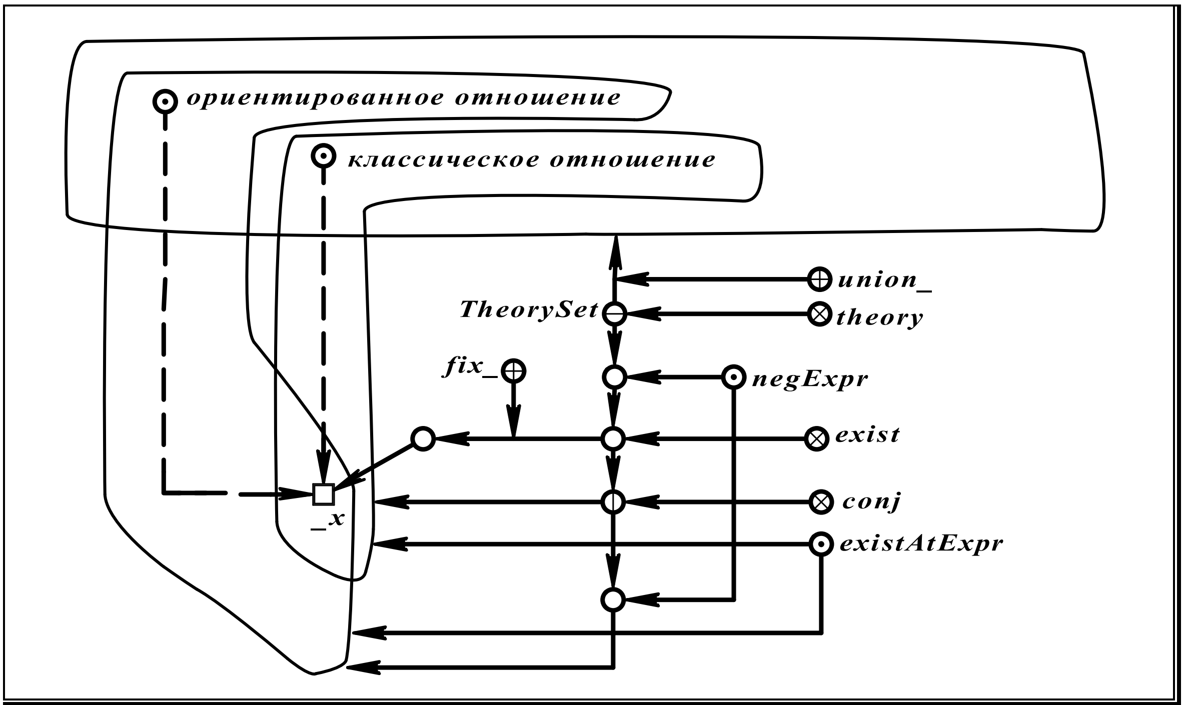
П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 4 . Запись на стилизованном естественном языке:

> **Н е   с у щ е с т в у е т** конструкции вида:
> **[** *_x* ≺≺— ***классическое отношение*** **;] ,**
> **у   к о т о р о й** :
> **н е   с у щ е с т в у е т** конструкции вида:
> **[** *_x* ≺≺— ***ориентированное отношение*** **;] .**

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 4 . Запись на языке SCLs:

> ***TheorySet_*** —≻ ¬ ∃ *_x* **([** *_x* ≺≺— ***классическое отношение*** **;] &**
> ¬ **[** *_x* ≺≺— ***ориентированное отношение*** **;]) ;**

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 4 . Запись на языке SCLg:

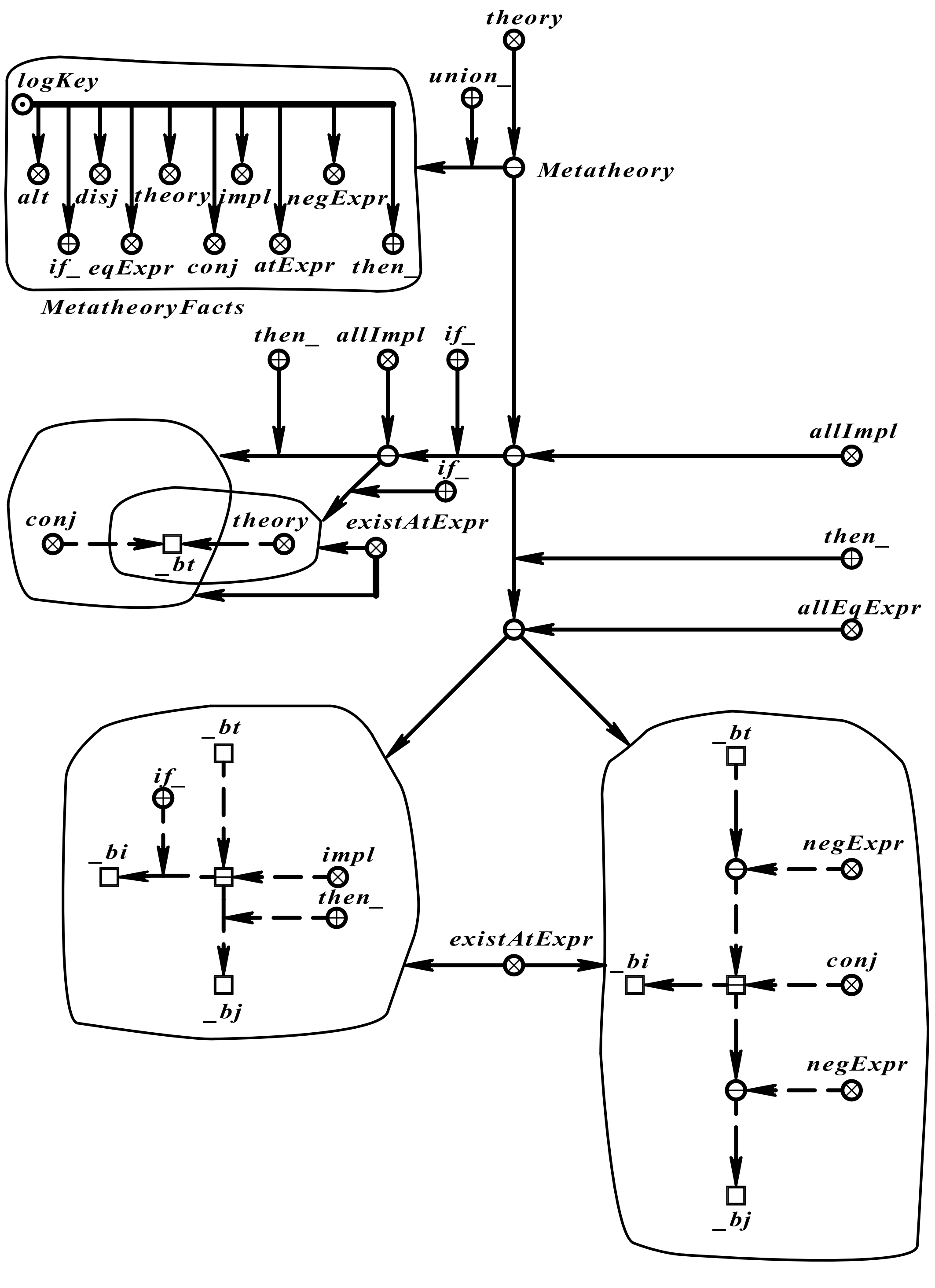


П р и м е р   5 . 5 . 5 . Очевидно, что высказывание, приведенное в примере 5.5.1, и высказывание, приведенное в примере 5.5.4, являются эквивалентными. Очевидно также, что такого рода эквивалентность имеет место для любых логических формул сходной структуры:

$(bi \longrightarrow bj)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg\ (bi\ \&\ \neg\ bj)$

Рассмотрим то, как эта закономерность записывается в рамках формальной метатеории, для которой описывается совокупность всевозможных формальных теорий, представленных на языке SCL. Существенным здесь является то, что сама метатеория может быть представлена также на языке SCL, поскольку любая формальная теория, представленная на языке SCL, представляет собой реляционную структуру специального вида, а сам язык SCL ориентирован на описание произвольных реляционных структур. Таким образом, единство языка и метаязыка в предлагаемых графодинамических моделях проявляется не только на уровне языка SCB, но и на уровне языка SCL.

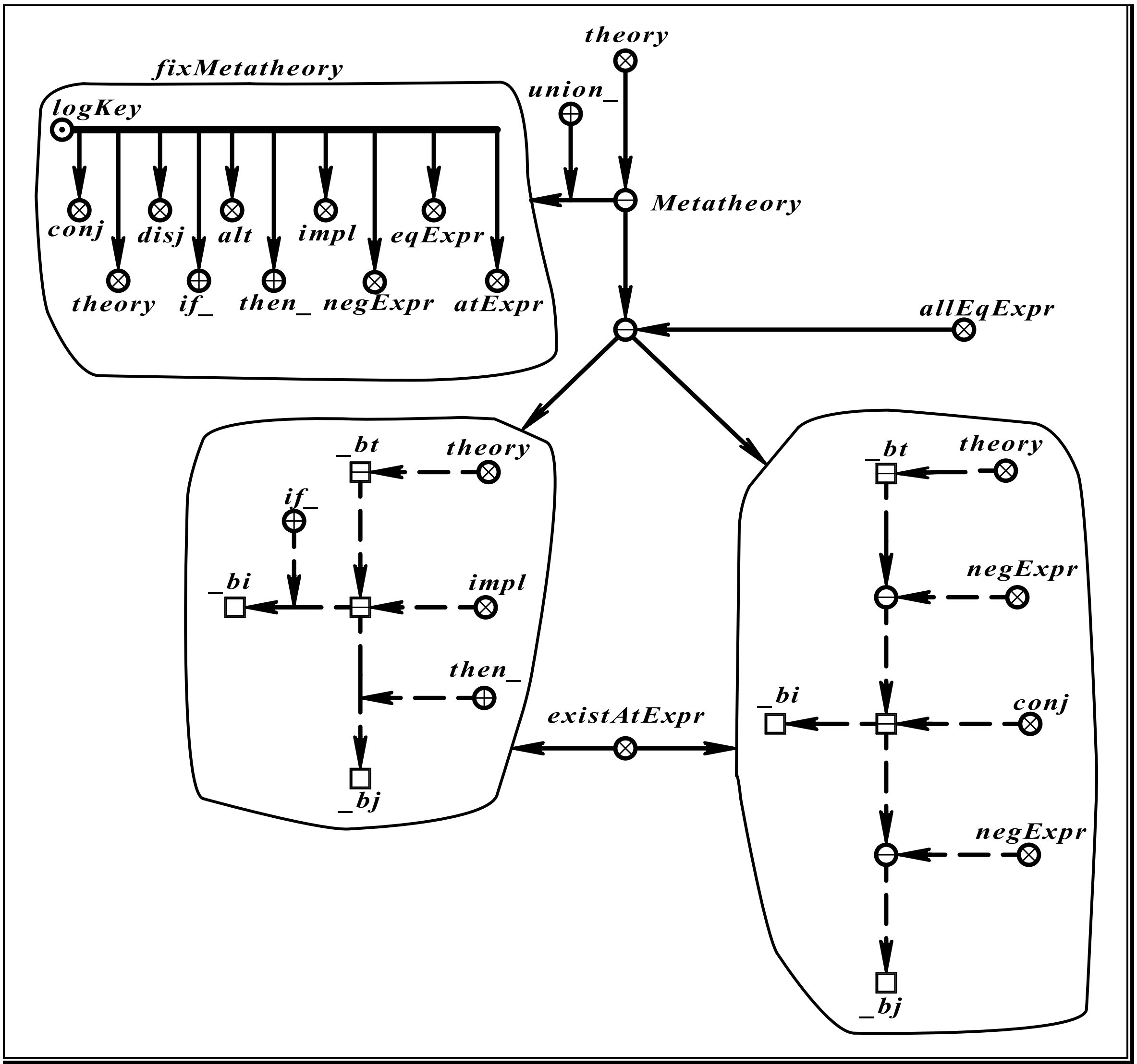
П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 5 . Запись на языке SCLg (вариант 1):



/* Здесь множество "*logKey*" включает в себя знаки всех сигнатурных элементов (ключевых узлов), указывающих структурный тип формулы ***/**

Очевидно, что приведенный sclg-текст можно переписать по-другому – в виде следующих двух высказываний об эквивалентности, входящих в состав формальной метатеории.

Продолжение примера 5.5.5. Запись на языке SCLg (вариант 2):



Пример 5.5.6. Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) некоторые тернарные отношения являются классическими;
2) существуют тернарные отношения, являющиеся классическими;
3) существует по крайней мере одно отношение являющееся как тернарным, так и классическим.

Продолжение примера 5.5.6. Запись на стилизованном естественном языке и SCs:

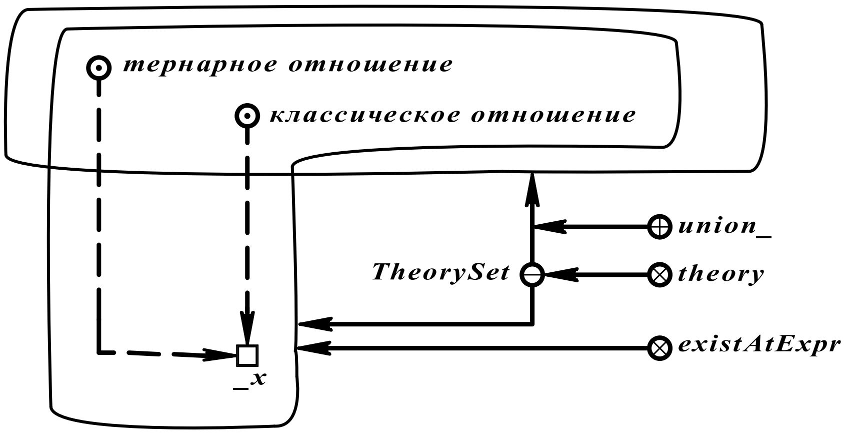
Существует конструкция вида:
[_x ≺≺— ***тернарное отношение* , *классическое отношение* ;].**

Примечание. Множество, элементы которого удовлетворяют данному условию, есть пересечение множества "***тернарное отношение***" и множества "***классическое отношение***".

Продолжение примера 5.5.6. Запись на языке SCLs:

TheorySet —≻ ∃ _x
[_x ≺≺— ***тернарное отношение* , *классическое отношение* ;];**

Продолжение примера 5.5.6. Запись на SCLg:



Пример 5.5.7. Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) существуют отношения, являющиеся тернарными, но не являющиеся классическими;
2) существует по крайней мере одно отношение, которое относится к классу тернарных отношений, но не относится к классу классических отношений.

Продолжение примера 5.5.7. Запись на стилизованном естественном языке и SCs:

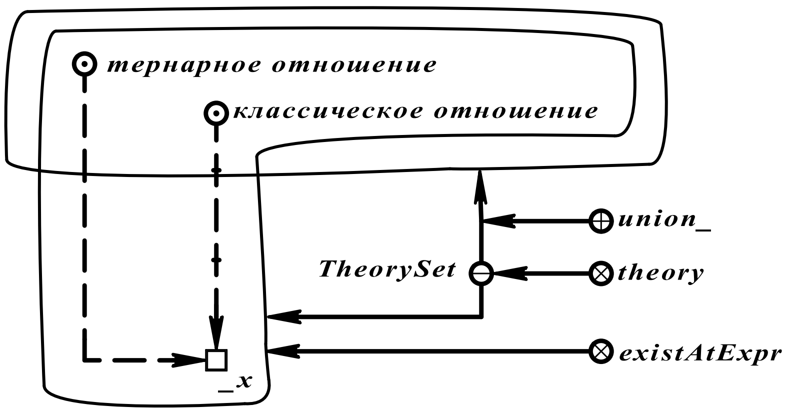
Существует конструкция вида:
[*_x* ≺≺— ***тернарное отношение*** **;** *_x* ≺≺+ ***классическое отношение*** **;].**

Примечание. Множество, элементы которого удовлетворяют данному условию, есть результат вычитания множества "***классическое отношение***" из множества "***тернарное отношение***".

Продолжение примера 5.5.7. Запись на языке SCLs:

TheorySet —≻ ∃ *_x* **[** *_x* ≺≺— ***тернарное отношение*** **;**
_x ≺≺+ ***классическое отношение*** **;];**

Продолжение примера 5.5.7. Запись на языке SCLg:



Пример 5.5.8. Эквивалентная запись высказывания, приведенного в примере 5.5.7.

Продолжение примера 5.5.8. Запись на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

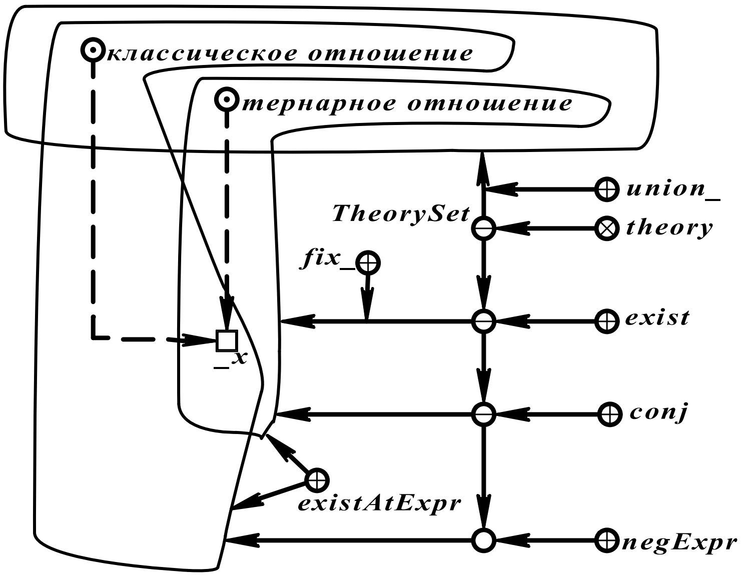
Существует конструкция вида:
[*_x* ≺≺— *тернарное отношение* **;]**

для которой
не существует конструкции вида:
[*_x* ≺≺— *классическое отношение* **;].**

Продолжение примера 5.5.8. Запись на языке SCLs:

TheorySet —≻ ∃ *_x* **([** *_x* ≺≺— *тернарное отношение* **;]**
& ¬ **[** *_x* ≺≺— *классическое отношение* **;]);**

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 8 . Запись на языке SCLg:



П р и м е ч а н и е . Логическая структура данного высказывания отличается от структуры высказывания, приведенного в примере 5.5.4, только тем, что здесь конъюнктивное высказывание является позитивным.

П р и м е р   5 . 5 . 9 . Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) существуют отношения, не являющиеся ни классическими, ни тернарными;
2) существуют отношения, каждое из которых не является классическим и не является тернарным.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 9 . Запись на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

С у щ е с т в у е т конструкция вида:
[*_x* ≺≺— ***отношение*** **;**
_x ≺≺⁄— ***классическое отношение*** **,** ***тернарное отношение*** **;] ;**

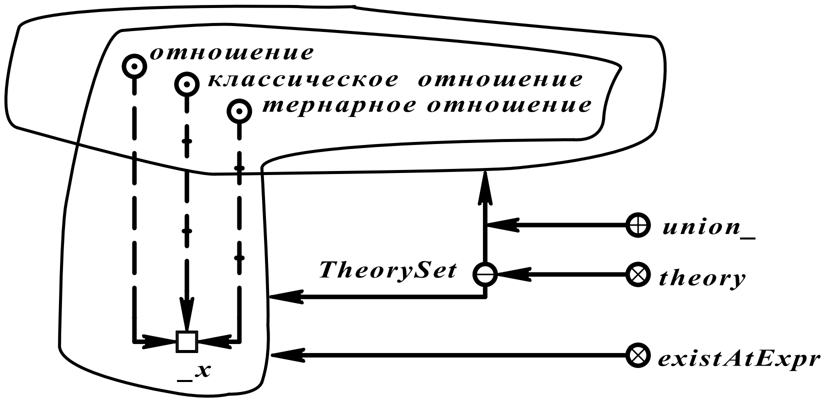
Логическая структура этого высказывания аналогична высказыванию, рассмотренному в примере 5.5.7. Отличие здесь заключается только в количестве негативных дуг.

П р и м е ч а н и е . Множество, элементы которого удовлетворяют данному условию, представляет собой результат вычитания множества “**(** ***классическое отношение*** ∩ ***тернарное отношение*** **)**” из множества “***отношение***”.

Продолжение примера 5.5.9. Запись на языке SCLs:

TheorySet —> ∃ ***_x*** [***_x*** —<<— ***отношение*** ; ***_x*** ≺≺+ ***классическое отношение*** , ***тернарное отношение*** ;] ;

Продолжение примера 5.5.9. Запись на языке SCLg:



Примечание. В соответствии с правилом замены негативной дуги на негативное атомарную формулу (см. пример 5.6.2) от высказывания, приведенного в примере 5.5.9, легко перейти к целому ряду эквивалентных высказываний.

Пример 5.5.10. Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) не существует ни одного классического отношения, которое являлось бы булеаном;
2) не существует ни одного булеана, который был бы классическим отношением.

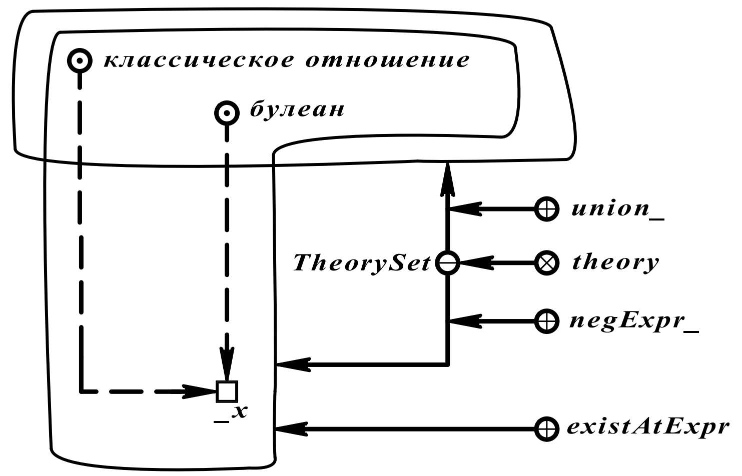
Продолжение примера 5.5.10. Запись на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

Не существует конструкция вида:
[***_x*** —<<— ***классическое отношение*** , ***булеан*** ;]

Продолжение примера 5.5.10. Запись на языке SCLs:

TheorySet —> ¬ ∃ ***_x*** [***_x*** —<<— ***классическое отношение*** , ***булеан*** ;] ;

Продолжение примера 5.5.10. Запись на языке SCLg:



Примечание. От рассматриваемого высказывания можно перейти к целому ряду эквивалентных высказываний в соответствии с правилом преобразования негативных конъюнктивных формул в импликативные (см. пример 5.5.5). Примерами таких эквивалентных высказываний являются:

1) каждое классическое отношение не является булеаном;
2) каждый булеан не является классическим отношением.

Заметим при этом, что атомарное высказывание в языке SCL является вырожденным случаем конъюнктивного высказывания и может быть представлено в виде эквивалентной конъюнкции атомарных высказываний.

Завершая рассмотрение высказывания, приведенного в примере 5.5.10, заметим, что теоретико-множественная трактовка этого высказывания заключается в том, что пересечение множества "***классическое отношение***" и множества "***булеан***" не содержит элементов, т.е. является пустым множеством.

Пример 5.5.11. Варианты записи высказываний на естественном языке:

1) некоторые отношения в состав своей области определения включают некоторые тернарные классические отношения (но, возможно, не все тернарные классические отношения и, возможно, не только тернарные классические отношения).

   Примечание. Примером такого отношения является метаотношение "***функциональная зависимость***", поскольку:

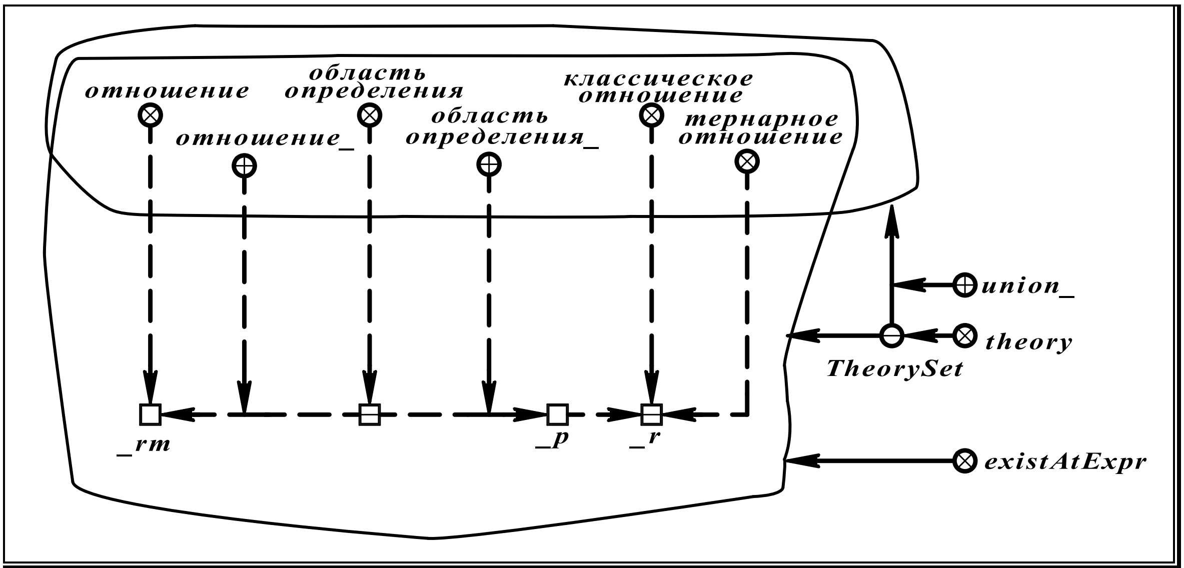
   - не все тернарные классические отношения входят в область определения этого метаотношения, а только те, которые имеют функциональную зависимость;
   - кроме некоторых тернарных классических отношений, в область определения метаотношения "***функциональная зависимость***" входят также некоторые неклассические отношения, некоторые бинарные отношения, некоторые четырехарные отношения и т.д.

2) существуют отношение ***rm*** и тернарное классическое отношения ***r*** такие, что ***r*** является одним из элементов области определения отношения ***rm***.

Продолжение примера 5.5.11. Запись на стилизованном естественном языке и с использованием языка SCs:

Существует конструкция вида:
[*_rm* ≺≺— *отношение* ; *_p* —≻≻ *_r* ;
***область определения* —≻≻ ‹· *отношение_* :: *_rm* ,**
***область определения_* :: *_p* ·› ;**
***_rm* ≺≺— *классическое отношение* , *тернарное отношение* ;].**

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 1 . Запись на SCLg:



П р и м е р 5 . 5 . 1 2 . Варианты записи высказывания на естественном языке:

1) **некоторые** отношения в состав своей области определения включают **все** бинарные ориентированные отношения, но возможно не только их.

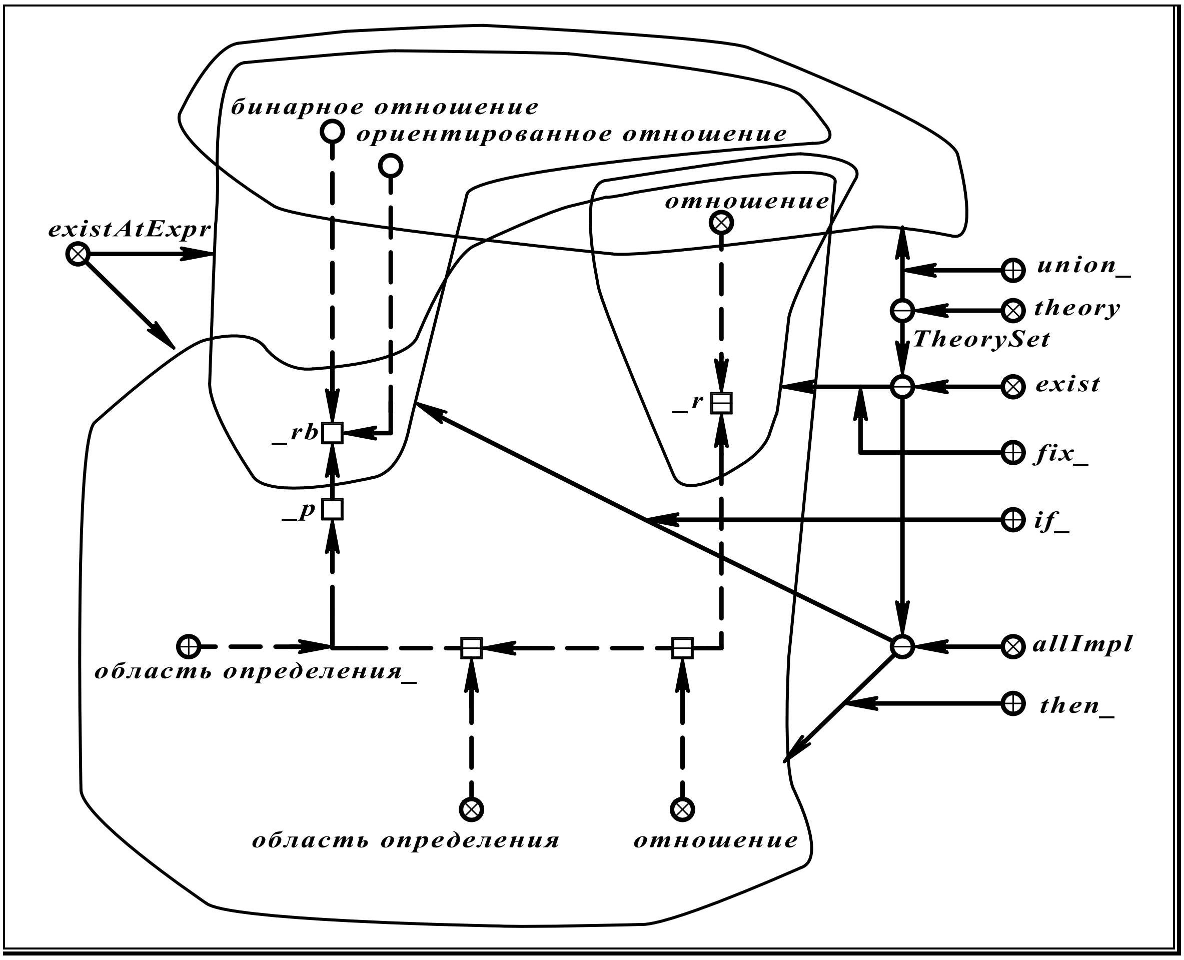
> **Примечание.** Примером такого отношения "***соответствие***", в область определения которого кроме **всевозможных** (для любого бинарного ориентированного отношения можно построить семейство кортежей метаотношения "***соответствие***") бинарных ориентированных отношений входят и другие объекты – множества, не являющиеся бинарными ориентированными отношениями.

2) существует по крайней мере одно отношение такое, что каждое бинарное ориентированное отношение входит в состав его области определения.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 2 . Запись на стилизованном естественном языке и с использованием языка SCs:

С у щ е с т в у е т конструкция вида:
[*_r* ≺≺— ***отношение*** **;]**
у к о т о р о й :
д л я к а ж д о г о *_rb* имеет место импликация следующих логических формул:
- **е с л и с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [*_rb* ≺≺— ***бинарное отношение*** **,** ***ориентированное отношение*** **;]**
- **т о с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [***область определения*** —≻≻ **‹·** ***отношение_*** **::** *_r* **,**
  область определения_ **::** *_p* **·›** **;** *_p* —≻≻ *_rb* **;]**

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 2 . Запись на SCLg:



П р и м е р 5 . 5 . 1 3 . Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) некоторые отношения в состав своей области определения включают все бинарные ориентированные отношения и только их;
2) существует по крайней мере одно отношение, у которого:
   - все бинарные ориентированные отношения являются элементами его области определения**,**
   - и наоборот все элементы его области определения являются бинарными ориентированными отношениями.

Примечание. Примерами таких отношений являются “***транзитивное замыкание***” и “***произведение бинарных отношений***”.

Примечание. Из определения понятия равенства множеств (см. пункт 3.3.11) следует, что область определения отношения, которое удовлетворяет сформулированным выше требованиям, является множеством, равным множеству всевозможных бинарных ориентированных отношений.

Продолжение примера 5.5.13. Запись на стилизованном естественном языке и с использованием языка SCs:

Существует конструкция вида:
[*_r ⪪— отношение* **;**
область определения —≫ ⟨• отношение_ :: _r , область определения_ :: _p •⟩ **;**
]
у которой для каждого *_rb* имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:
- **существует** конструкция вида:
  [*_rb ⪪— бинарное отношение , ориентированное отношение* **;]**
- **существует** конструкция вида:
  [*_rb ⪪— _p* **;]**

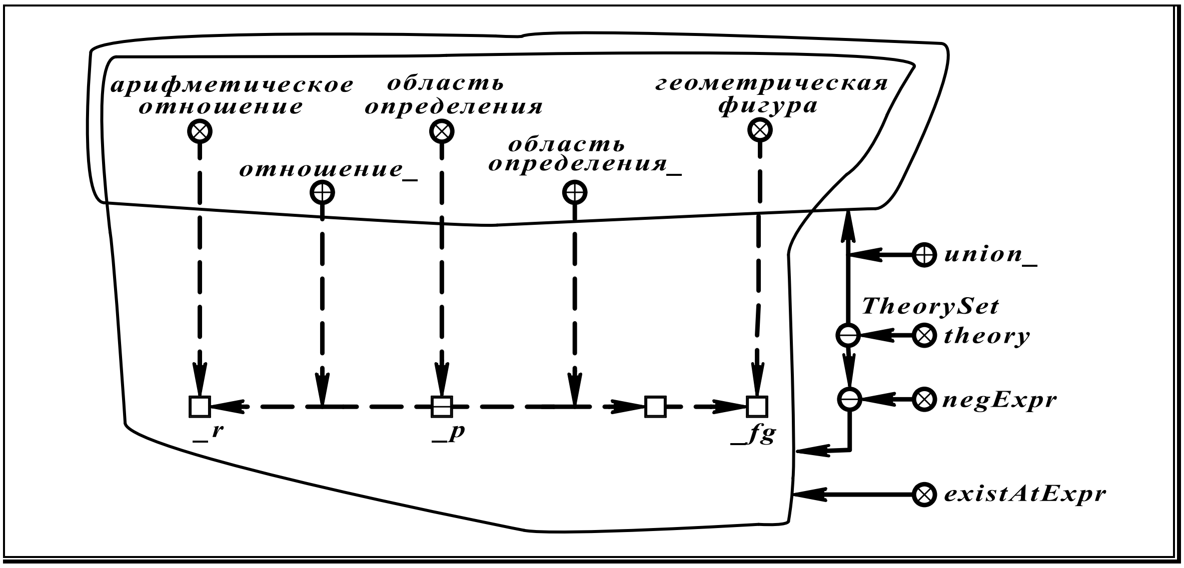
Пример 5.5.14. Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:
1) не существует ни одного арифметического отношения, которое бы включало какие-либо геометрические фигуры в состав своей области определения;
2) не существует ни одной геометрической фигуры, которая была бы элементом области определения какого-либо арифметического отношения.

Продолжение примера 5.5.14. Запись на стилизованном естественном языке и с использованием языка SCs:

Не существует конструкции вида:
[*_r ⪪— арифметическое отношение* **;**
область определения —≫ ⟨• отношение_ :: _r , область определения_ :: _p •⟩ **;**
_p —≫ _fg ⪪— геометрическая фигура **;]**

Примечание. Логическая структура данного высказывания отличается от логической структуры высказывания, приведенного в примере 5.5.11, тем, что в первом случае высказывание о существовании является негативным, а во втором – позитивным.

Продолжение примера 5.5.14. Запись высказывания на языке SCLg:

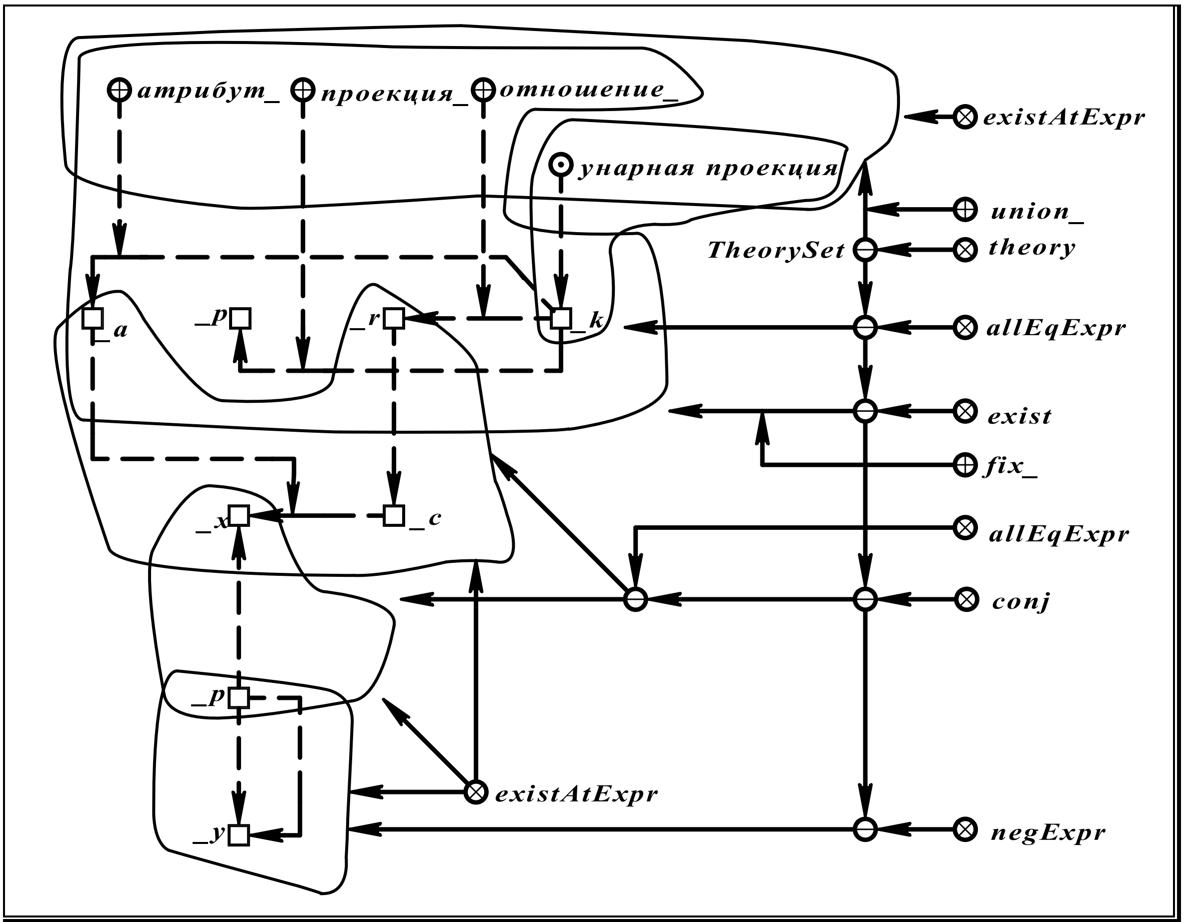


Пример 5.5.15. Определения метаотношения “***унарная проекция***” (см. пункт 3.3.13).

Продолжение примера 5.5.15. Запись на языке SCLs:

```
TheorySet —>
  ∀ _k ([ _k <<— унарная проекция ;]
      <==> ∃ _r , _p , _a ([ _k == <• отношение_:: r , проекция_:: _p ,
                                 атрибут_:: _a •> ]
                  &∀ _x (∃ _c [ _r —>> _c —>> _a :: _x ]
                        <==> [ _p —>> _x ;])
                  &¬ ∀ _y [ _p —> _y , _y ;]
                  )
      );
```

Продолжение примера 5.5.15. Запись на языке SCLg:



Пример 5.5.16. Определение отрезка

Продолжение примера 5.5.16. Варианты записи на естественном языке:

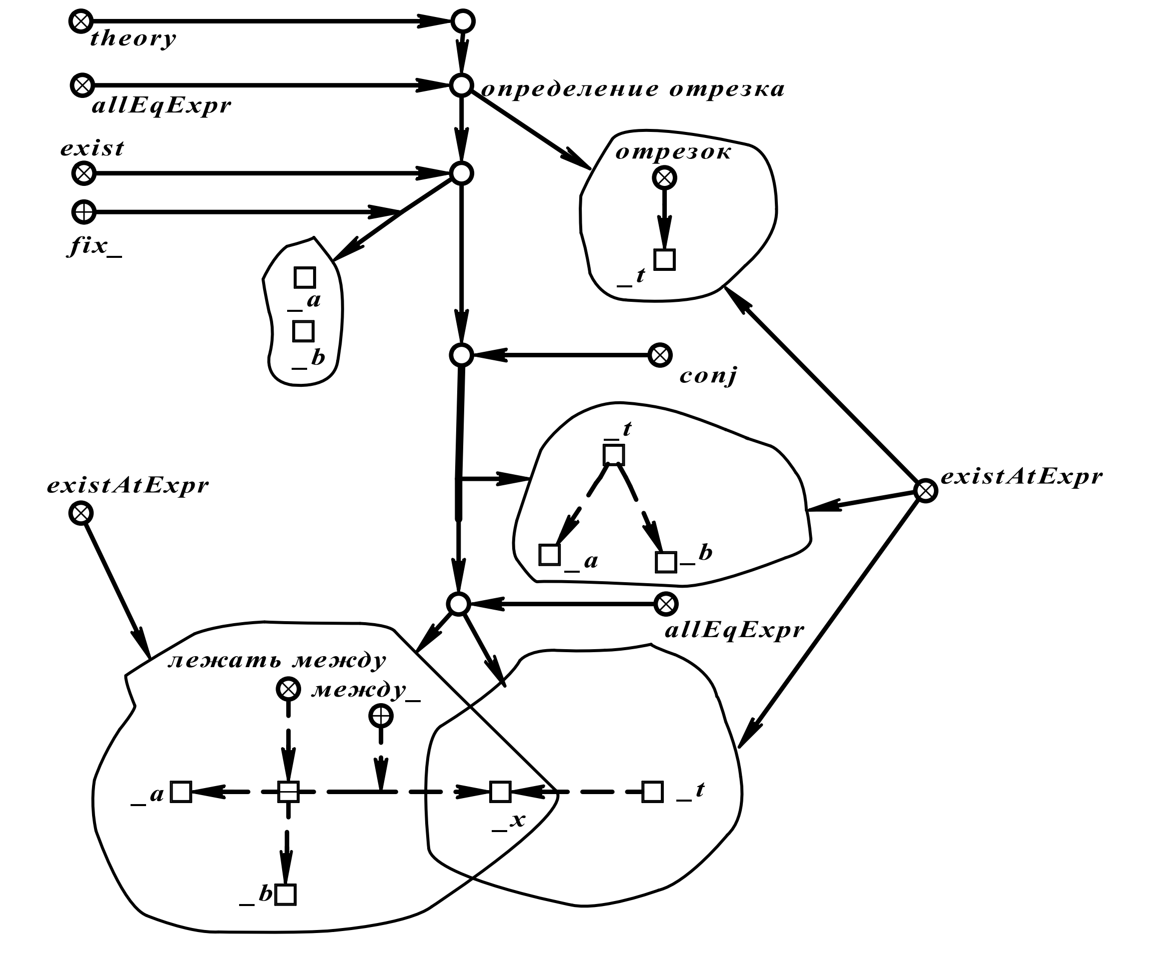
1) отрезок – это множество всех тех и только тех точек, которые лежат между двумя заданными.
2) будем говорить, что ***_t*** есть отрезок, в том и только в том случае, если существуют ***_a*** и ***_b*** такие, что:
   - ***_a*** и ***_b*** являются элементами множества ***_t*** ;

- для каждого *_x* справедливо следующее:
  - <u>если</u> *_x* есть элемент множества ***_t***, <u>не совпадающий</u> с *_a* и *_b*,
  - <u>то</u> *_x* лежит между *_a* и *_b* <u>и наоборот</u>.

Продолжение примера 5.5.16. <u>Запись определения отрезка на стилизованном естественном языке и языке SCs</u>:

Для всех значений переменной *_t* имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:
- **Существует** конструкция вида:
  [*отрезок* —>> *_t* **;] ;**
- **Существует** конструкция вида:
  [*_t* —>> *_a* **,** *_b* **;] ;**
  для которой имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:
  - **существует** конструкция вида:
    [*_t* —>> *_x* **,** *_a* **,** *_b* **;] ; /*** включение в состав этой конструкции переменных ***_a*** и ***_b*** означает то, что значение переменной *_x* не должно совпадать со значениями переменных ***_a*** и ***_b*** ***/**
  - **существует** конструкция вида:
    [*лежать между* —>> **‹·** *_a* **,** *между_* **:** *_x* **,** *_b* **·› ;] .**

Продолжение примера 5.5.16. <u>Запись определения отрезка на языке SCLg</u>:



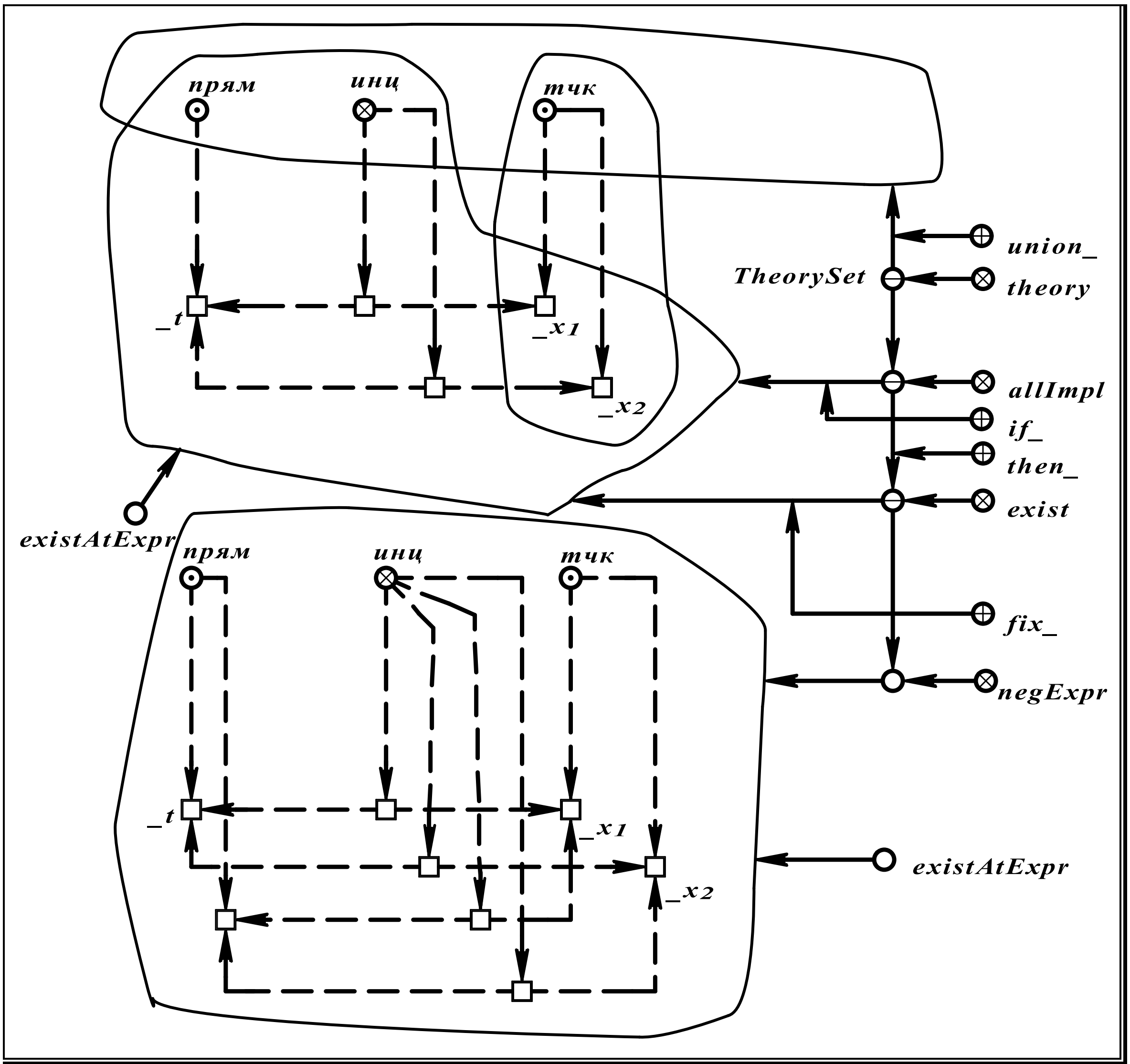
/* Здесь более одной копии имеют изображения sc-узлов *_t* , *_a* , *_b* , *allEqExpr* , *existAtExpr* ***/**

Продолжение примера 5.5.16. Запись определения отрезка на языке SCLs:

```
TheoryGeo ->
   ∀ _t ( [ отрезок ->> _t ; ]
        <=> ∃ _a , _b ( [ _t ->> _a , _b ; ] ;
                  & ∀ _x ( [ _t ->> _x , _a , _b ; ]
                        <=> [ лежать между -> <· _a, между_: _x , _b ·> ; ]
                        )
                  )
      ) ;
```

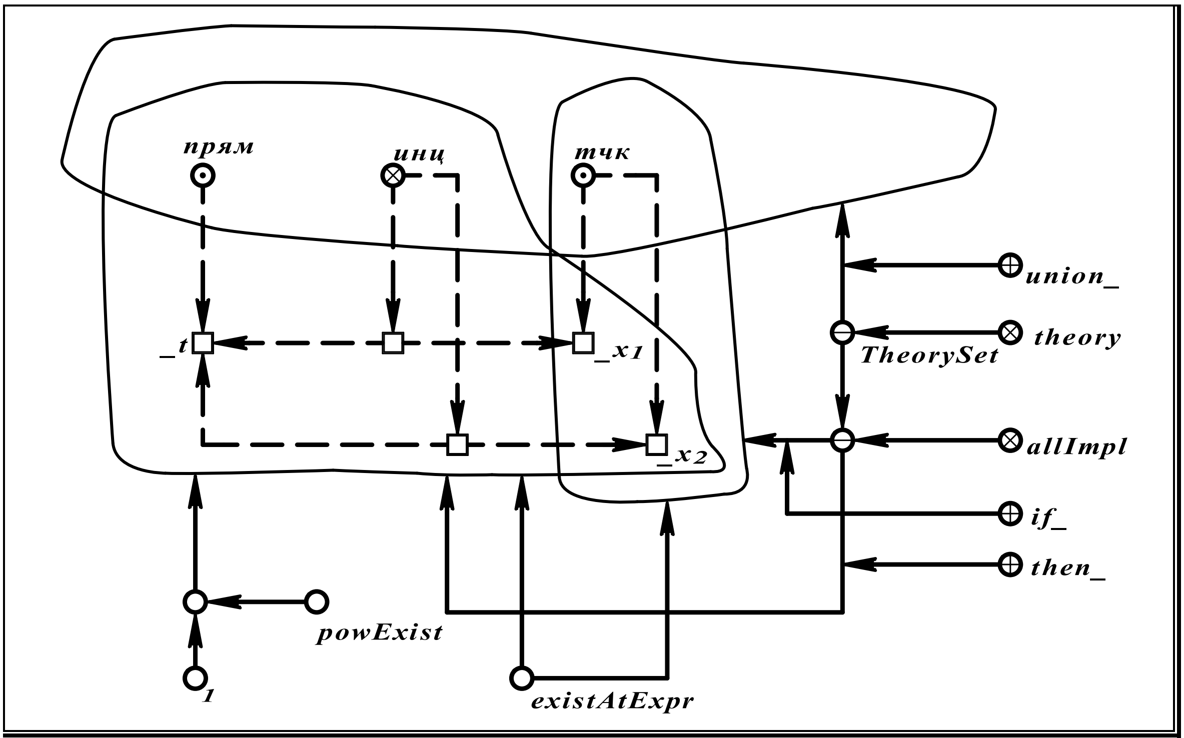
Пример 5.5.17. Запись аксиомы геометрии Евклида о существовании прямой, инцидентной двум точкам:
Для каждой пары точек существует одна и только одна инцидентная им прямая.

Продолжение примера 5.5.17. Запись аксиомы на языке SCLg:



Примечание. Квантор существования и единственность в SCLg задается явно (ключевой узел *exist*), но его можно свести к неявно задаваемому квантору существования. Приведем такого рода запись рассматриваемой аксиомы.

Продолжение примера 5.5.17. Запись аксиомы на языке SCLg (вариант 2)



Продолжение примера 5.5.17. Запись аксиомы на языке SCLs (вариант 2):

```
TheoryGeo —> ∀ _x1, _x2 ([тчк —>> _x1 , _x2 ;]
                        —> ∃ ! _t [ прям —>> _t ;
                                    инц —>> {• _t , _x1 ; •}, {• _t , _x2 ; •};];
                        );
```

Пример 5.5.18. Определение множества всех множеств, которые не являются элементами самих себя [100; 99] (***Виленкин Н.Я.1969кн-РасскОМ***; ***Виленкин Н.Я..1980кн-СовреОШКМ***).

Такое множество в пункте 3.1 мы называли множеством всевозможных нерефлексивных множеств и поставили ему в соответствии идентификатор “***нерефлексивное множество***”. В некоторых работах, например [100] (***Виленкин Н.Я.1969кн-РасскОМ***), нерефлексивные множества называют ординарными, а рефлексивные соответственно – экстраординарными.

К строгой формулировке определения необходимо подходить весьма аккуратно, чтобы не привнести в него внутреннюю противоречивость, приводящую к тому, что называется антиномиями (парадоксами) теории множеств. Противоречие здесь может возникнуть при рассмотрении вопроса о том, является ли само определяемое множество элементом самого себя. Поэтому самым логичным способом предотвратить внутреннюю противоречивость рассматриваемого определения – это разбить его на две части:

- часть определения, формулирующая критерий принадлежности к определяемому множеству всех тех и только тех множеств, которые не совпадают с определяемым множеством;
- часть определения, которая дополнительно указывает либо факт принадлежности, либо факт непринадлежности определяемого множества самому себе.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 1 8 . Запись этого определения на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

Имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих логических формул:
- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:

  [*_s* ⤛— ***нерефлексивное множество*** **;] ;**

  /* Из этой атомарной формулы следует то, что значение переменной ***_s*** не может совпадать sc-узлом, имеющим идентификатор “***нерефлексивное множество***”, т. е. не может совпадать со знаком определяемого множества. ***/**
- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:

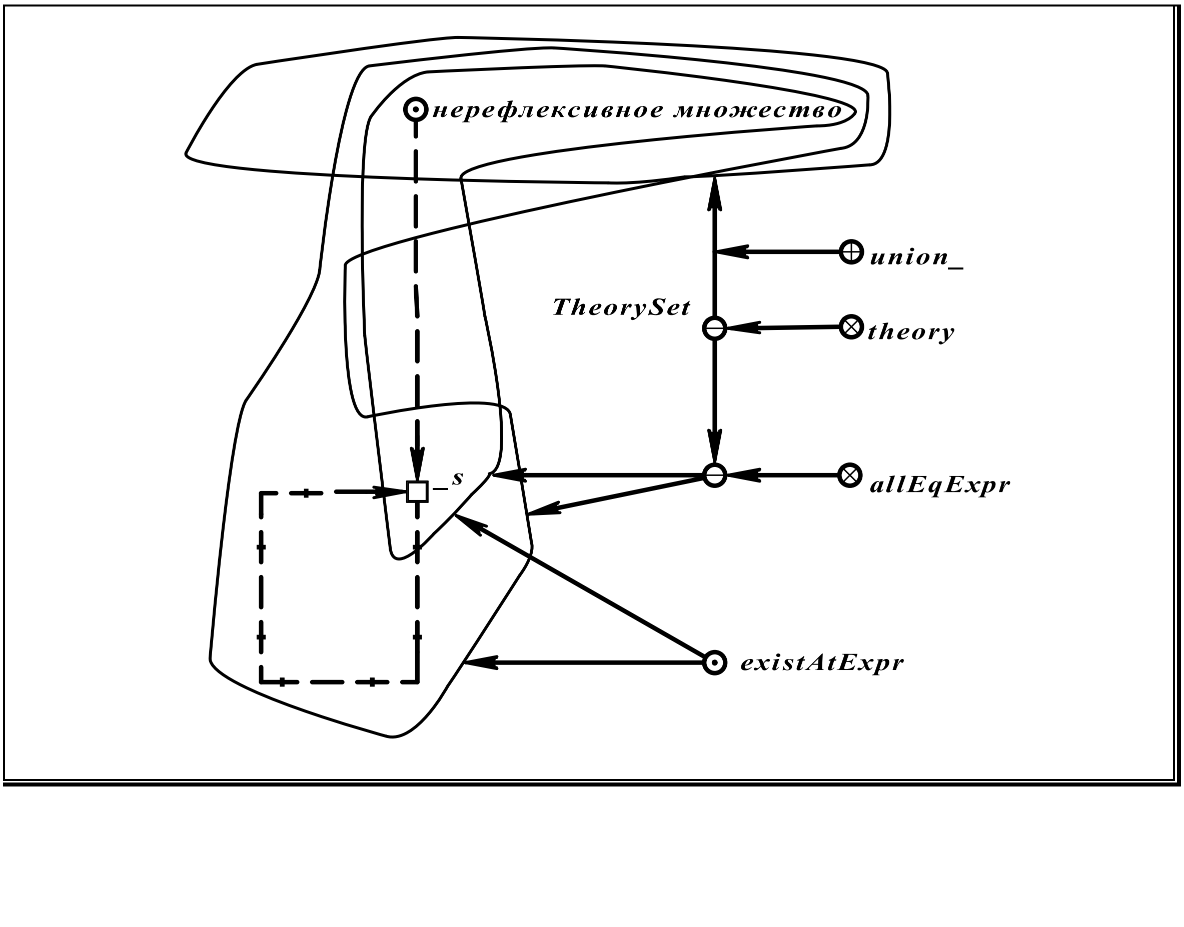
  [*_s* ⤛⇸ *_s* **;** ***нерефлексивное множество*** **;] ;**

  /* Включение в данную атомарную формулу sc-узла с идентификатором “***нерефлексивное множество***” означает, что значение переменной ***_s*** не должно совпадать со знаком определяемого множества. Другими словами, под ***_s*** подразумевается знак любого другого множества ***/**

Попробуем сформулировать приведённое здесь определение на естественном языке:
Множество ***_s***, не являющееся множеством всех нерефлексивных множеств, является элементом множества всех нерефлексивных множеств в том и только в том случае, если это множество ***_s*** не является элементом самого себя.

Таким образом в этом определении речь идёт только о тех множествах, которые не совпадают со множеством всех нерефлексивных множеств (т. е. с определяемым множеством). При таком определении вопрос о том, является ли множество всех нерефлексивных множеств элементом самого себя, остаётся открытым. То есть этому определению не противоречит ни утверждение о том, что множество всех нерефлексивных множеств является элементом самого себя, ни утверждение о том, что множество всех нерефлексивных множеств не является элементом самого себя. Итак, причина возникновения по крайней мере некоторых видов противоречий, которые называют парадоксами теории множеств, не во внутренней противоречивости самой теории множеств, а в некорректных, внутренне противоречивых формулировках некоторых утверждений.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 1 8 . Запись определения на языке SCLg:



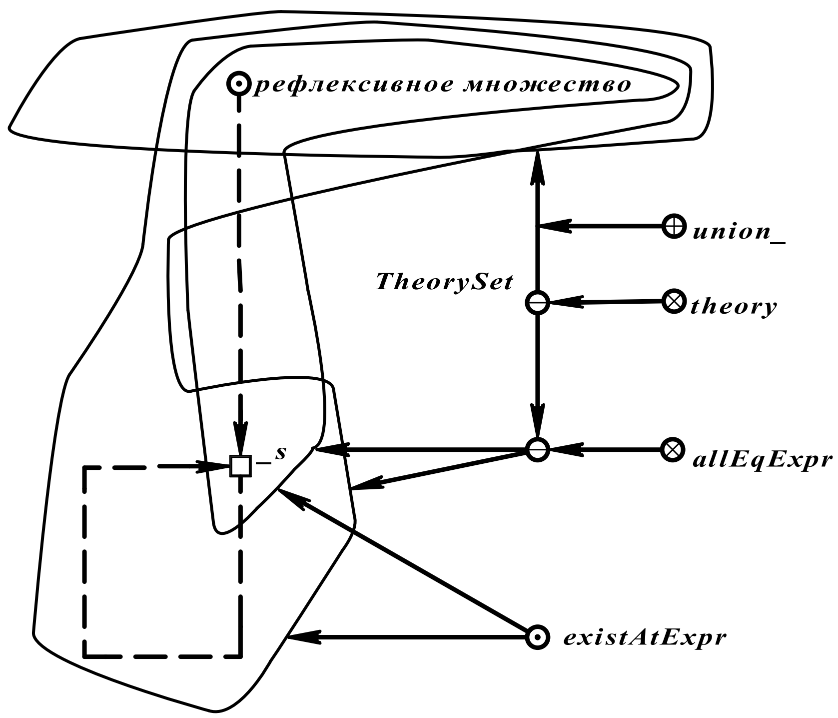
Продолжение примера 5.5.18. Запись на языке SCLs:

$\forall$ *_s* **([** *_s* ≺≺— ***нерефлексивное множество*** **;]**
≺═≻
[*_s* ≺≺⊷ *_s* **;** ***нерефлексивное множество*** **;]) ;**

Пример 5.5.19. Определение множества всех множеств, которые являются элементами самих себя. В пункте 3.1 такое множество мы называли множеством всевозможных рефлексивных множеств и поставили ему в соответствие идентификатор "***рефлексивное множество***".

Очевидно, что определение очень похоже на предыдущее. Поэтому ограничимся его записью на языке SCLg.

Продолжение примера 5.5.19. Запись определения на языке SCLg:



Пример 5.5.20. Формальная запись следующего высказывания. Человека t будем называть брадобреем для группы лиц s, в состав которой входит и человек t, в том и только в том случае, если человек t бреет каждого человека x, принадлежащего группе лиц s, если этот человек не бреет себя сам.

Очевидно, что приведённая формулировка некорректна, т. к. к противоречию приводит попытка дать ответ на вопрос "бреет ли брадобрей сам себя". См. [100] (***Виленкин Н.Я.1969кн-РасскОМ***). Переформулируем рассматриваемое высказывание в целях устранения в нём внутренней противоречивости.

Человека ***t*** будем называть брадобреем для группы лиц ***s*** , в состав которой входит и человек ***t*** , в том и только в том случае, если человек ***t*** бреет каждого человека ***x*** , не совпадающего с ***t*** , принадлежащего группе лиц ***s*** , если этот человек <u>не</u> бреет себя сам.

При таком определении брадобрея ответ на вопрос "бреет ли брадобрей сам себя" может быть как положительным, так и отрицательным. То есть существуют два типа таких брадобреев:

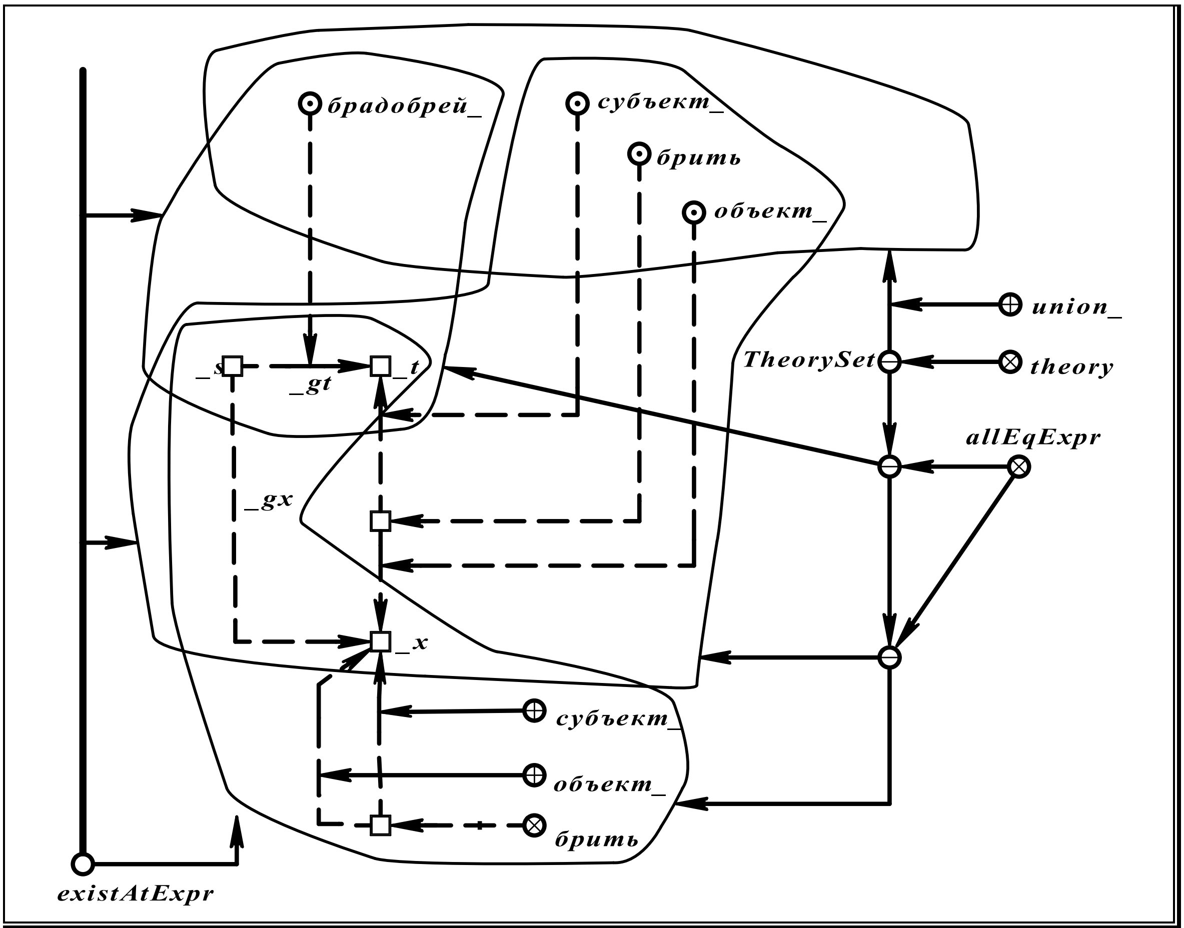
- брадобреи, которые сами себя бреют;
- брадобреи, которые сами себя не бреют.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 2 0 . Запись этого определения <u>на стилизованном естественном языке</u> с использованием языка SCs:

> **Д л я в с е х** значений переменных ***_s***, ***_t*** имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих логических формул:
>
> - **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
>
>   **[*_s* —>> *брадобрей_* :: *_t* ;]**
> - **д л я в с е х** значений переменных ***_x*** имеет место **э к в и в а л е н т н о с т и** следующих логических формул:
>   - **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
>
>   **[*брить* —>> ‹· *субъект_* :: *_t* , *объект_* :: *_x* ·› ; *_s* —>> *_x* , *_t* ;]**
>   - **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
>
>   **[*брить* -/->> ‹· *субъект_* :: *_x* , *объект_* :: *_x* ·› ; *_s* —>> *_x* , *_t* ;]**

Здесь атрибут ***субъект_*** (субъект действия) указывает на человека, который бреет, а атрибут ***объект_*** (объект действия, то, на что действие направлено) указывает на человека, которого бреют.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 2 0 . <u>Запись определения на языке SCLg</u>:



Продолжение примера 5.5.20. Запись на языке SCLs:

```
∀ _s, _t ([ _s >— _gt >— _t ; брадобрей —>> _gt ; ]
        <=>
        (∀ _x  [ брить —>> <• субъект_ :: _t , объект_ :: _x •> ;
                _s >— _gx >— _x ; _s >— _gt >— _t ; ]
               <=>
               [ брить —/>> <• субъект_ :: _x ,  объект_ :: _x •>;
                _s >— _gx >— _x ; _s >— _gt >— _t ; ]
        )
       );
```

Пример 5.5.21. Определение изоморфизма систем множеств (см. пункт 3.4.3).

Продолжение примера 5.5.21. Запись этого определения на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

Для всех значений переменной *_k* имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:

- **существует** конструкция вида:
  [*_k* <<— *изоморфизм систем множеств* **;]**
- **существует** конструкция вида:
  [*_k* <<— *взаимно однозначная сюръекция* **;**
  _k **==** <• <• *_sx* , *атр_* :: *_ax* •>, <• *_sy* , *атр_* :: *_ay* •>, *отнш_* :: *_r* •> **;]**
  для которой имеет место **конъюнкция** следующих логических формул:
  - имеет место эквивалентность следующих логических формул:
    - **существует** конструкция вида:
      [*_sx* —>> *_gx* , *_ex* ; *_gx* >— *_ex* ; *_gx* <<— *пара принадлежности* ;
      _r —>> <• *_ax* :: *_gx* , *_ay* :: *_gy* •> , <• *_ax* :: *_ex* , *_ay* :: *_ey* •> ; **]**
    - **существует** конструкция вида:
      [*_sy* —>> *_gy* , *_ey* ; *_gy* >— *_ey* ; *_gy* <<— *пара принадлежности* ;
      _r —>> <• *_ax* :: *_gx* , *_ay* :: *_gy* •> , <• *_ax* :: *_ex* , *_ay* :: *_ey* •> ; **]**
  - имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:
    - **существует** конструкция вида:
      [*_sx* —>> *_vx* , *_gx* ; *_vx* >— *_gx* ; *_vx* <<— *узловое множество* ;
      _gx <<— *пара принадлежности* ;
      _r —>> <• *_ax* :: *_vx* , *_ay* :: *_vy* •> , <• *_ax* :: *_gx* , *_ay* :: *_gy* •> ;**]**
    - **существует** конструкция вида:
      [*_sy* —>> *_vy* , *_gy* ; *_vy* >— *_gy* ; *_vx* <<— *узловое множество* ;
      _gy <<— *пара принадлежности* ;
      _r —>> <• *_ax* :: *_vx* , *_ay* :: *_vy* •>, <• *_ax* :: *_gx* , *_ay* :: *_gy* •> ; **]**

Продолжение примера 5.5.21. Запись на языке SCLs:

```
∀ _k ([ _k <<— изоморфизм систем множеств ]
      <=> ∃ _sx , _ax , _sy, _ay, _r
     ([ _k <<— взаимно однозначная сюръекция ;
       _k == <• <• _sx , атр_ :: _ax •>, <• _sy , атр_ :: _ay •> , отнш_ :: _r •>; ]
     & ∀ _gx , _ex , _gy , _ey
       ([ _sx —>> _gx , _ex ; _gx >— _ex ;
```

```
        _gx ≺≺— пара принадлежности ;
        _r —≻≻ ❮• _ax :: _gx , _ay :: _gy •❯,
         ❮• _ax :: _ex , _ay :: _ey •❯ ; ]
        ≺⇒≻
        [ _sy —≻≻ _gy , _ey ; _gy ≻— _ey;
        _gy ≺≺— пара принадлежности;
        _r —≻≻ ❮• _ax :: _gx , _ay :: _gy •❯,
        ❮• _ax :: _ex , _ay :: _ey •❯;])
    & ∀ _gx, _ex, _gy, _ey
    ( [ _sx —≻≻ _vx, _gx; _vx ≻— _gx;
        _vx ≺≺— узловое множество;
        _gx ≺≺— пара принадлежности;
        _r —≻≻ ❮• _ax :: _vx , _ay :: _vy •❯,
        ❮• _ax :: _gx , _ay :: _gy •❯;]
        ≺⇒≻
        [_sy —≻≻ _vy, _gy; _vy ≻— _gy;
        _vx ≺≺— узловое множество;
        _gy ≺≺— пара принадлежности;
        _r —≻≻ ❮• _ax :: _vx , _ay :: _vy •❯,
        ❮• _ax :: _gx , _ay :: _gy •❯;]
    )
  )
);
```

Пример 5.5.22. Определение понятия "*группа*" (см. пункт 3.4.2).

Продолжение примера 5.5.22. Запись этого определения на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs (для записи структуры атомарных формул).

Для всех значений переменной *_G* имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:

- **существует** конструкция вида:
  [***группа —≻≻ _G;*** **]**
- **существует** конструкция вида:
  [***алгебраическая структура с одной бинарной операцией —≻≻ _G ;***
  G —≻≻ сигнатурное отношение :: r ,
  атрибут_ :: аргумент-1_ ,
  атрибут_ :: аргумент-2_ ,
  атрибут_ :: результат_;
  алгебраическая операция —≻≻
  ❮• отношение :: _r , результат_ :: результат_ •❯;]
  для которой имеет место **конъюнкция** следующих логических формул:
  - **для всех** *_a*, *_b* имеет место **импликация** следующих логических формул:
    - **если существует** конструкция вида
      [_G —≻≻ первичный элемент_ :: _a ,
      первичный элемент_ :: _b ;]
    - **то существует** конструкция вида
      [_G == [• _r —≻≻ ❮• аргумент-1_ :: _a , аргумент-2_ :: _b ,

*результат_* :: *_c* ·❯ ; ·] ;]

- **для всех** *_a*, *_b*, *_c*, *_d* имеет место **импликация** следующих логических формул (аксиома ассоциативности):
  - **если существует** конструкция вида:
    [*_G* ==[· *_r* —>> ❮· *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_bc* , *результат_* :: *_d* ·❯,
    ❮· *аргумент-1_* :: *_b* , *аргумент-2_* :: *_c* ,
    *результат_* :: *_bc* ·❯ ; ·] ;]
  - **то существует** конструкция вида
    [*_G* ==[· *_r* —>> ❮· *аргумент-1_* :: *_ab* , *аргумент-2_* :: *_c* , *результат_* :: *_d* ·❯,
    ❮· *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_b* ,
    *результат_* :: *_ab* ·❯ ; ·] ;]
- **существует** конструкция вида (аксиома о существовании нейтрального элемента):
  [*_G* —>> *первичный элемент_* :: *_e* ;]
  для которой имеет место **импликация** следующих логических формул:
  - **если существует** конструкция вида:
    [*_G* —>> *первичный элемент_* :: *_a* ;]
  - **то существует** конструкция вида
    [*_G* ==[· *_r* —>> ❮· *аргумент-1_* :: *_e* , *аргумент-2_* :: *_a* , *результат_* :: *_a* ·❯,
    ❮· *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_e* ,
    *результат_* :: *_a* ·❯ ; ·] ;]
- **для всех** *_a*, *_b* имеет место **импликация** следующих логических формул (аксиома о левом делении):
  - **если существует** конструкция вида
    [*_G* —>> *первичный элемент_* :: *_a* , *первичный элемент_* :: *_b* ;]
  - **то существует** конструкция вида
    [*_G* ==[· *_r* —>> ❮· *аргумент-1_* :: *_x* , *аргумент-2_* : *_a* ,
    *результат_* :: *_b* ·❯ ; ·] ;]
- **для всех** *_a*, *_b* имеет место **импликация** следующих логических формул (аксиома о правом делении):
  - **если существует** конструкция вида
    [*_G* —>> *первичный элемент_* :: *_a* , *первичный элемент_* :: *_b* ;]
  - **то существует** конструкция вида
    [*_G* ==[· *_r* —>> ❮· *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_x* ,
    *результат_* :: *_b* ·❯ ; ·] ;]

Упражнения к подразделу 5.5.

Упражнение 5.5.1. Запишите на SCLs определение полугруппы:

Полугруппа – это реляционная структура ***G***, у которой:

- отсутствуют сигнатурные множества;
- имеется два сигнатурных отношения, одно – основное (***ri***), другое вспомогательное (“***алгебраическая операция***”)
- имеется <u>только один</u> кортеж метаотношения “***алгебраическая операция***” вида:
  ❮ ***отношение_***: ***ri*** , ***аргумент_***: ***ai*** , ***аргумент_***: ***aj*** , ***результат_***: ***ar*** , ❯
- пересечение множеств ***G*** и ***ri*** представляет собой тернарное классическое отношение со схемой **{** ***ai*** , ***aj*** , ***ar*** **}** и алгебраическую операцию с аргументами **{** ***ai*** , ***aj*** **}**.

- в G имеется 6 элементов с атрибутом “***атрибут***”: три основных (ai , aj , ar) и три вспомогательных (***отношение_***, ***атрибут_***, ***результат_***).
- для каждой структуры вида $(x1 \circ x2) \circ x3 \Longrightarrow x1 \circ (x2 \circ x3)$ (ассоциативность).

Упражнение 5.5.2. Запишите утверждение о том, что из любого набора sc-элементов можно построить множество. Это утверждение разбивается на два следующих утверждения:

- из любого sc-элемента можно построить его синглитон (1-мощное множество, содержащее этот sc-элемент);
- из любого множества и любого sc-элемента можно построить другое множество, состоящее из элементов заданного множества с добавлением указанного sc-элемента (если этот sc-элемент входит в число элементов заданного множества, то увеличивается на единицу число вхождений этого sc-элемента).

Упражнение 5.5.3. Аналогичным образом запишите утверждение о том, что из любого набора sc-элементов и любого набора атрибутов можно построить кортеж с любой комбинацией распределения атрибутов по его компонентам.

Упражнение 5.5.4. Запишите утверждение о том, что существует множество, для которого существует sc-элемент, не являющийся элементом этого множества.

Упражнение 5.5.5. Запишите утверждение о том, что существует по крайней мере одна пара кратных пар принадлежности.

Упражнение 5.5.6. Запишите утверждение о том, что существует по крайней мере одна пара принадлежности, для которой не существует кратной ей пары принадлежности.

Упражнение 5.5.7. Запишите утверждение о том, что существует по крайней мере одна петля принадлежности (т. е. существуют множества содержащие знак самого себя в качестве своего элемента).

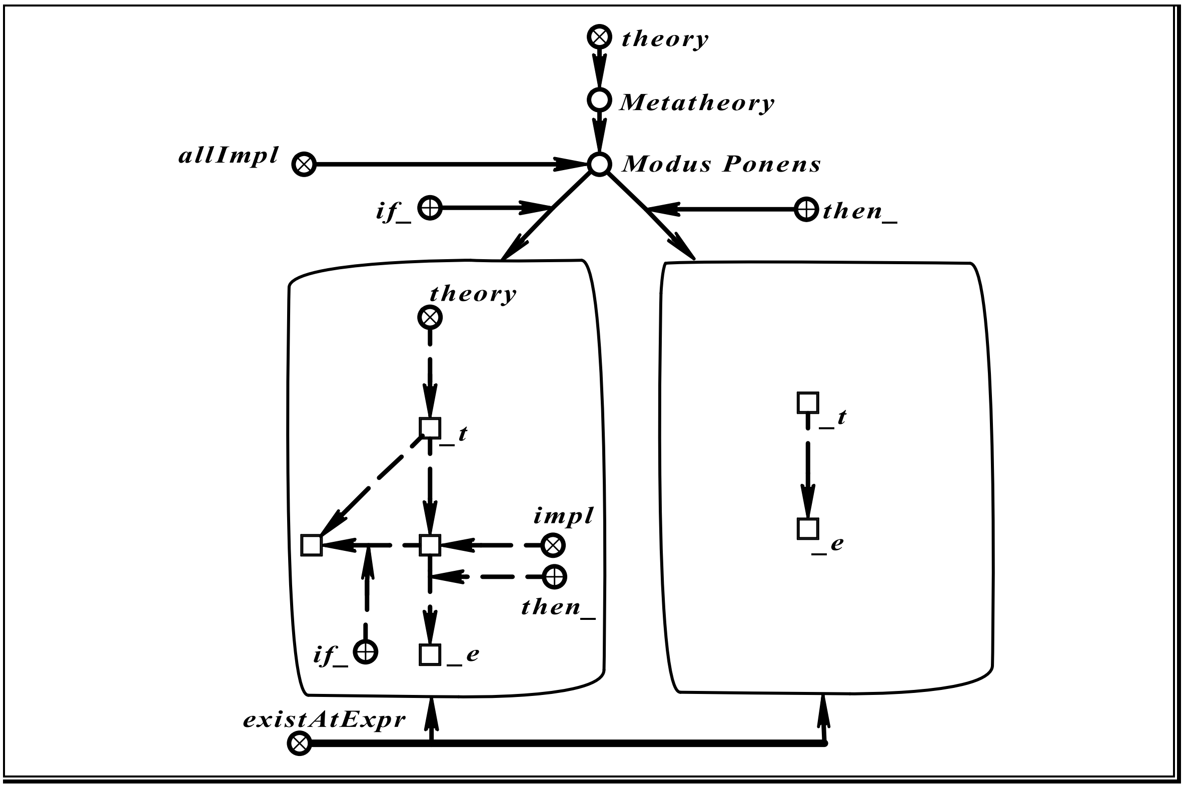
Упражнение 5.5.8. Запишите утверждение о том, что существует множества, не содержащие знак самого себя в качестве своего элемента.

5.6. Формальная метатеория и её представление на языке SCL

По аналогии с примером 5.5.5 можно привести еще целый ряд высказываний, которые описывают общие свойства всевозможных формальных теорий, каждая из которых описывает ту или иную предметную область, которая формально трактуется как некоторая реляционная структура. Свойства всевозможных формальных теорий описываются в рамках специальной метатеории (*Metatheory*), для которой совокупность всевозможных формальных теорий является описываемой предметной областью.

Приведем примеры записи общих логических закономерностей, имеющих место для всех формальных теорий. Описания этих закономерностей входят в состав формальной метатеории, которая описывает свойства всевозможных формальных теорий. Очевидно, в высказываниях этой метатеории присутствуют не только простые переменные, но и метапеременные.

Пример 5.6.1. Описание правила логического вывода **Modus ponens**

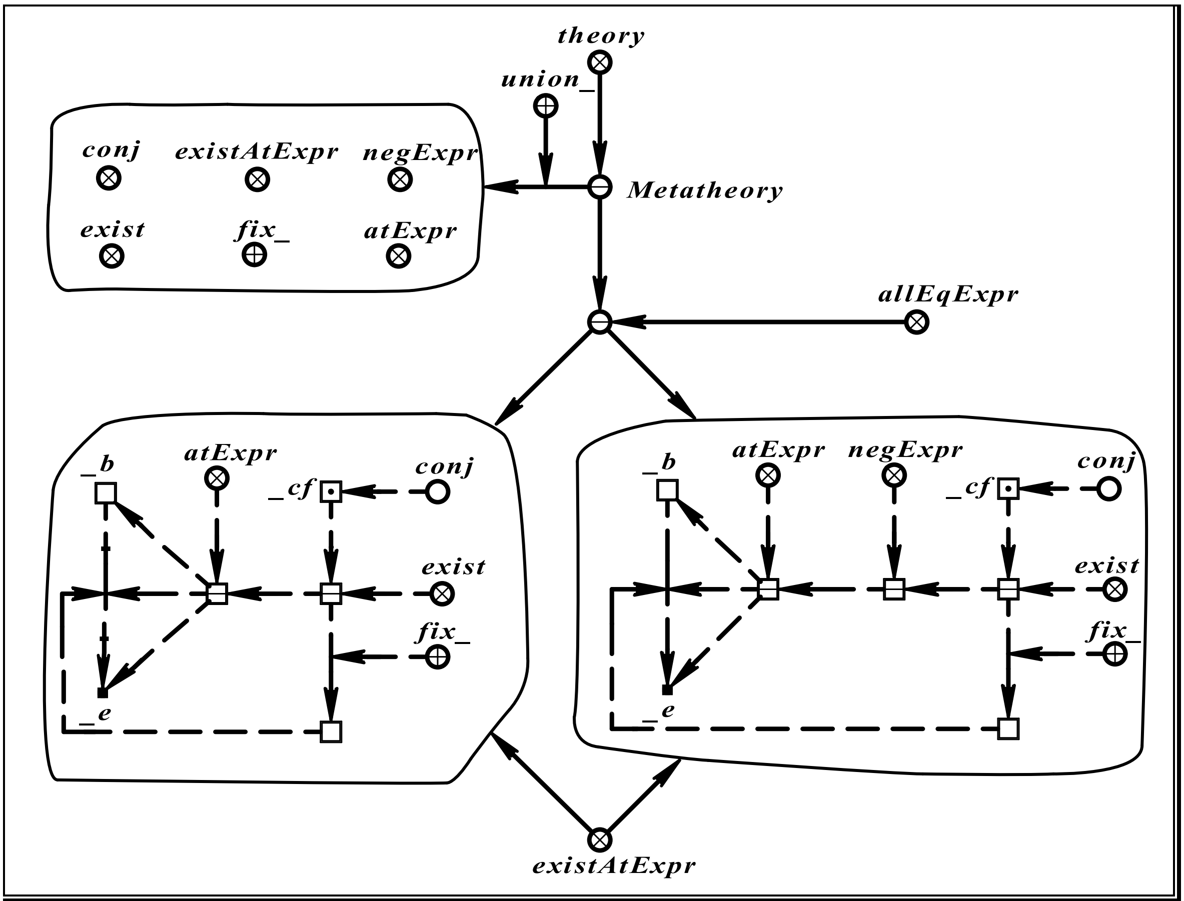


Пример 5.6.2. Рассмотрим в качестве примера правило замены негативной константной дуги на эквивалентное негативное высказывание. Итак, рассмотрим запись в рамках метатеории высказывания о том, что дуга непринадлежности, входящая в состав атомарного высказывания, эквивалентна негативному атомарному высказыванию, в состав которого входят:

- узел, из которого выходит указанная дуга непринадлежности;
- элемент, в который эта дуга входит;
- дуга принадлежности, проведенная из указанного узла в указанный элемент.

Из этого метавысказывания следует, что дуга непринадлежности, входящая в число фиксируемых элементов конъюнктивного высказывания, может быть преобразована в соответствующее негативное атомарное высказывание, входящее в состав того же конъюнктивного высказывания. Следовательно, дугу непринадлежности можно рассматривать просто как лаконичный способ записи соответствующего негативного атомарного высказывания.

Продолжение примера 5.6.2. Запись на языке SCLg:



В данном sclg-тексте используется понятие ***"absent"***, являющееся знаком множества, состоящего из sc-элементов, которые должны отсутствовать. В случае, если указанные элементы присутствуют, они должны быть удалены (ликвидированы). Таким образом, понятие ***"absent"*** является одним из средств, обеспечивающих описание различных преобразований sc-текстов.

Упражнения к подразделу 5.6.

Упражнение 5.6.1. Запишите на SCLg определение метаотношения ***"быть парой логических формул, одна из которых непосредственно входит в состав другой"***.

Упражнение 5.6.2. Запишите на SCLg определение метаотношения ***"быть парой логических формул, одна из которых входит в состав другой"***.

Упражнение 5.6.3. Запишите на SCLg определение бинарного метаотношения, каждая пара которого связывает атомарные scl-формулы, одна из которых является частной по отношению ко второй.

Упражнение 5.6.4. Запишите на SCLg определение истинного высказывания о существовании, в котором квантор существования действует на атомарную scl-формулу. Это высказывание, для которого существует изоморфный подграф в описываемой реляционной структуре.

Упражнение 5.6.5. Запишите на SCLg определение истинного высказывания о существовании, имеющего произвольный вид.

Упражнение 5.6.6. Запишите на SCLg истинного высказывания о всеобщности, в котором квантор всеобщности действует на импликативное высказывание, в котором оба компонента являются атомарными scl-формулами.

Упражнение 5.6.7. Запишите на SCLg общую логическую закономерность (закон отрицания отрицания): $\neg\neg \boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{b}$

Выводы к разделу 5

В данном разделе показано, что на базе языка SC (Semantic Code), который является достаточно простым расширением фактографического языка SCB (путем добавления переменных и введения множеств, элементами которых являются переменные), можно построить логический язык, тексты которого представляют собой не что иное, как представление реляционных структур определенного вида. И точно так же, как в языке SCB, мы легко переходим от реляционных структур к реляционным метаструктурам, в языке SC мы легко переходим от логических формул и формальных теорий к логическим метаформулам и формальным метатеориям.